4 Etude des fonctions numériques

4.1 Limites des fonctions numériques

Dans ce qui suit, $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction numérique définie sur son ensemble de définition D_f.

Définition 36 (limite en un point)**.** *Soit l un nombre réel. On dit que* **la limite de f en a est égale à** *l si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in D_f, \qquad |x - a| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Dans ce cas, on note $\lim_{x \to a} f(x) = l$.

On dit que **la limite de f en a est égale à** $+\infty$ *si*

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in D_f, \qquad |x - a| < \delta \implies f(x) > M.$$

Dans ce cas, on note $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.

On dit que **la limite de f en a est égale à** $-\infty$ *si*

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in D_f, \qquad |x - a| < \delta \implies f(x) < M.$$

Dans ce cas, on note $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Notation 13. *Par abus de langage, on dit souvent* la limite de $f(x)$ quand x tend vers a *plutôt que* la limite de f en a.

Remarque 31. Au lycée, on dit que la limite de f en a est égale à l si *tout intervalle ouvert I qui contient l contient toutes les valeurs $f(x)$ lorsque x est suffisamment proche de a*. La définition ci-dessus exprime cette condition en termes mathématiques précis.

Exemple 53. On a les limites classiques suivantes :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1; \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

Remarquez qu'aucune de ces fonctions n'est définie en 0, ce qui n'empêche pas de calculer une limite. Par contre la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0 : quand x s'approche de 0, elle oscille "de plus en plus vite" entre -1 et 1.

Définition 37 (limite en un point par valeurs supérieures ou inférieures)**.** *Dans cette définition l désigne soit un nombre réel, soit $+\infty$ ou $-\infty$.*
On dit que **la limite de f en a par valeurs supérieures est égale à** *l si la restriction de f à $[a, +\infty[$ a pour limite l quand x tend vers a. Dans ce cas on note*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \geq a}} f(x) = l \qquad ou \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = l$$

On dit que **la limite de f en a par valeurs inférieures est égale à** l *si la restriction de f à $]-\infty, a]$ a pour limite l quand x tend vers a.*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \leq a}} f(x) = l \qquad \textit{ou} \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = l$$

Remarque 32. Lorsqu'on étudie la limite de f en a par valeurs supérieures (ou inférieures), on ne s'intéresse donc qu'aux valeurs de $f(x)$ pour x proche de a et supérieur à a. Cela permet souvent de préciser des comportements de $f(x)$ qui peuvent être différents selon que x s'approche de a par au-dessus ou par au-dessous, comme pour la fonction inverse en 0 puisque :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \geq 0}} \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \textit{et} \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \leq 0}} \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Exemple 54. Pour la fonction Logarithme Népérien, on a $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$.

Définition 38 (limite en $+\infty$)**.** *Soit l un nombre réel. On dit que* **la limite de f en $+\infty$ est égale à** l *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x > A, \qquad |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Dans ce cas, on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

On dit que **la limite de f en $+\infty$ est égale à $+\infty$** *si*

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x > A, \qquad f(x) > M.$$

Dans ce cas, on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

On dit que **la limite de f en $+\infty$ est égale à $-\infty$** *si*

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x > A, \qquad f(x) < M.$$

Dans ce cas, on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

On définit de même la notion de limite en $-\infty$:

Définition 39 (limite en $-\infty$)**.** *Soit l un nombre réel. On dit que* **la limite de f en $-\infty$ est égale à** l *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x < A, \qquad |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Dans ce cas, on note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$.

On dit que **la limite de f en $-\infty$ est égale à $+\infty$** *si*

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x < A, \qquad f(x) > M.$$

Dans ce cas, on note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

On dit que **la limite de f en $-\infty$ est égale à $-\infty$** *si*

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x < A, \qquad f(x) < M.$$

Dans ce cas, on note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Remarque 33. Comme en terminale, le fait que la limite de f en $+\infty$ est égale à l correspond au cas où *tout intervalle ouvert qui contient l contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est suffisamment grand* (où suffisamment grand pourrait se dire "suffisamment proche de $+\infty$").

Exemple 55. On a aussi les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0; \quad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty; \quad \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha$$

4.2 Règle de calcul des limites

On a les règles de calcul suivantes.

4.1. Propriété – opérations sur les limites.

On désigne par a soit un nombre réel, soit $+\infty$ ou $-\infty$. Soit f et g deux fonctions numériques ayant chacune une limite en a, alors on a les égalités suivantes, à condition que la quantité de droite existe :
- $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$
- $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \times \lim_{x\to a} g(x)$
- $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$

Exemple 56. Grâce aux règles de calcul ci-dessus, on obtient par exemple

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln(x) = \lim_{x\to+\infty} x \times \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = (+\infty)\times(+\infty) = +\infty$$

Le résultat précédent ne permet pas de calculer $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$, cependant on connait la limite de cette forme indéterminée, ainsi que d'autres croissances comparées entre polynômes, logarithme et exponentielle :

4.2. Propriété – croissances comparées polynômes /exp / ln.

Pour tout $\alpha > 0$ on a

$$\lim_{x\to0^+} x^\alpha \ln(x) = 0; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0; \quad \lim_{x\to-\infty} x^\alpha e^x = 0; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty;$$

Exemple 57. Par exemple, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x\to0^+} x\ln(x) = 0$

Exemple 58. Comme pour les suites, la limite du quotient de deux polynômes est celle de la limite du quotient des deux termes de plus haut degré :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_kx^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_0}{b_lx^l + b_{l-1}x^{l-1} + \ldots + b_0} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_kx^k}{b_lx^l} = \begin{cases} 0 & \text{si } k < l \\ \frac{a_k}{b_k} & \text{si } k = l \\ +\infty & \text{si } k > l \text{ et } a_k \text{ du même signe que } b_l \\ -\infty & \text{si } k > l \text{ et } a_k \text{ du signe contraire de } b_l. \end{cases}$$