Exemple 41. On considère la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de terme général $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Exemple 42. On considère la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $a > 1$.

3.3 Suites arithmético-géométriques

Définition 32. *Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite* **arithmético-géométrique** *si elle est définie par un processus itératif de la forme :*

$$\begin{cases} x_0 = b \\ \textit{pour tout } n \geq 0,\ x_{n+1} = q\,x_n + a \end{cases}$$

où a, b et q sont des réels fixés.

On a les cas particuliers suivants :
— Lorsque $q = 1$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi obtenue est une suite arithmétique de raison a.
— Lorsque $a = 0$, $q \neq 0$ et $q \neq 1$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obtenue est une suite géométrique de raison q.
Pour chacun de ces cas particuliers, on peut calculer la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (quand elle existe) et la somme des $n+1$ premiers termes selon les règles suivantes :

3.5. Propriété – Cas des suites arithmétiques.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique donnée par le processus itératif

$$\begin{cases} x_0 = b \\ \text{pour tout } n \geq 0,\ x_{n+1} = x_n + a \end{cases}$$

avec $a \neq 0$, alors on a

— la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite, et

$$\begin{cases} \text{si } a > 0, \text{ alors } \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} an + b = +\infty \\ \text{si } a < 0, \text{ alors } \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} an + b = -\infty \end{cases}$$

— la somme des $n+1$ premiers termes de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

$$x_0 + \ldots + x_n = \sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{k=0}^{n} (ak + b) = \frac{n(n+1)}{2} a + (n+1) b$$

Exemple 43. Calculer la somme des n+1 premiers entiers pairs : $0 + 2 + 4 + \ldots + 2n$.

3.6. Propriété – Cas des suites géométriques.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique donnée par le processus itératif

$$\begin{cases} x_0 = b \\ \text{pour tout } n \geq 0,\ x_{n+1} = q x_n \end{cases}$$

avec $q \neq 0$ et $q \neq 1$ et $b \neq 0$, alors on a

— la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut admettre ou non une limite :

$$\begin{cases} \text{si } q > 1 \text{ et } b > 0, \text{ alors } \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b\,q^n = +\infty \\ \text{si } q > 1 \text{ et } b < 0, \text{ alors } \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b\,q^n = -\infty \\ \text{si } q \in]-1,1[, \text{ alors } \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b\,q^n = 0 \\ \text{si } q \leq -1, \text{ alors la suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge.} \end{cases}$$

— la somme des $n+1$ premiers termes de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

$$x_0 + \ldots + x_n = \sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{k=0}^{n} b\,q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}\,b$$

Exemple 44. Calculer la somme $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$. Quelle est la limite de cette somme ?

Exemple 45. Une population microbienne augmente de 10% toutes les heures. On l'observe initialement avec 200 individus. Combien d'heures s'écouleront pour atteindre 10000 individus ?

Le cas général est le suivant :

3.7. Propriété – Cas des suites arithmético-géométriques.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmético-géométrique donnée par le processus itératif

$$\begin{cases} x_0 = b \\ \text{pour tout } n \geq 0,\ x_{n+1} = q x_n + a \end{cases}$$

alors

— le terme général de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donné par

$$x_n = \left(b + \frac{a}{q-1}\right) q^n - \frac{a}{q-1}$$

— la somme des $n+1$ premiers termes de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

$$x_0 + \ldots + x_n = \sum_{k=0}^{n} x_k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}\left(b + \frac{a}{q-1}\right) - (n+1)\frac{a}{q-1}$$

3.4 Quelques résultats théoriques

3.4.1 Limites classiques

On a les limites classiques :

— Quotient de deux polynômes :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \ldots + a_0}{b_l n^l + b_{l-1}n^{l-1} + \ldots + b_0} = \begin{cases} 0 & \text{si } k < l \\ \frac{a_k}{b_k} & \text{si } k = l \\ +\infty & \text{si } k > l \text{ et } a_k \text{ du même signe que } b_l \\ -\infty & \text{si } k > l \text{ et } a_k \text{ du signe contraire de } b_l \end{cases}$$

autrement dit la limite du quotient de deux polynômes est celle de la limite du quotient des deux termes de plus haut degré :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \ldots + a_0}{b_l n^l + b_{l-1}n^{l-1} + \ldots + b_0} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_k n^k}{b_l n^l} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_k}{b_l} n^{k-l}.$$

— limites associées aux fonctions ln et exp :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{n}\right) = -\infty; \qquad \lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty; \qquad \lim_{n\to+\infty} e^{-n} = 0; \qquad \lim_{n\to+\infty} e^{n} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1; \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^{\alpha}$$

— limites associées aux fonctions cos et sin :

$$\lim_{n\to+\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1; \qquad \lim_{n\to+\infty} n \left[\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right] = 0$$

3.4.2 Limites et monotonie

Définition 33. *Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite* **croisssante à partir du rang** n_0 *si*

$$\forall n \geq n_0, \qquad x_{n+1} \geq x_n.$$

Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **décroisssante à partir du rang** n_0 *si*

$$\forall n \geq n_0, \qquad x_{n+1} \leq x_n.$$

Une suite est **monotone** *si elle est croissante ou décroissante à partir d'un certain rang.*

Exemple 46. Cas des suites arithmétiques et géométriques.

Définition 34. *Soit M un nombre réel. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite* **majorée par** M *si tous ses termes sont inférieurs ou égaux à M :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_n \leq M.$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite* **minorée par** M *si tous ses termes sont supérieurs ou égaux à* M *:*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_n \geq M.$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite* **bornée** *si elle est à la fois minorée et majorée, c'est-à-dire qu'il existe un réel* A *tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |x_n| \leq A.$$

Exemple 47. Exemple de la suite $(1 + (-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.8. Théorème – Limites des suites monotones.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante à partir d'un certain rang. On a alors l'alternative :

— Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par un réel M, auquel cas la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie et

$$\lim_{n\to+\infty} x_n \ \leq \ M$$

— Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, auquel cas la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Dans le cas où la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang on obtient

— Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par un réel M, auquel cas la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie et

$$\lim_{n\to+\infty} x_n \ \geq \ M$$

— Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée, auquel cas la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.

Exemple 48. Rappel : si $n \geq 1$, on note $n!$ le produit les entiers de 1 à n :

$$n! \ = \ 1 \times 2 \times \cdots \times n$$

Par convention, on pose $0! = 1$. On démontre que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ est convergente.