
L1 Sciences et Techniques – 2016

Mathématiques MB11

THIERRY CHAMPION

Ces notes de cours sont en partie reprises de celles proposées
par Gloria Faccanoni pour le module M11.

1 Éléments de logique

1.1 Notions de logique

Définition 1. Une **assertion** est un énoncé auquel on peut attribuer sans ambiguïté une valeur de vérité : soit “Vrai” (noté V), soit “Faux” (noté F).

Exemple 1. — “ $1+1=2$ ” est une assertion, sa valeur de vérité est Vrai.

- “ $1+1=7$ ” est une assertion (F).
- “cet énoncé est faux” n’est pas une assertion.

Remarque 1. Le fait qu’une assertion ne puisse pas avoir une autre valeur que V ou F est en général désigné comme le “tiers exclu”.

Définition 2. Une **proposition** est un énoncé contenant une (ou plusieurs) variable(s) appartenant à un (ou des) ensemble(s) qui a la propriété que lorsqu’on remplace chacune des variables par un élément de l’ensemble correspondant cet énoncé devient une assertion, c’est-à-dire qu’on peut lui attribuer la valeur vrai ou faux.

Notation 1. On note en général $P(x)$ une proposition dont la variable est x : on rappelle ainsi que la valeur de vérité de P dépend de la valeur de x . Lorsque $P(x)$ est vraie on dit que $P(x)$ est vérifiée, ou bien que x vérifie P .

Exemple 2. Pour en entier n , l’énoncé $P(n)$ = “ n est un multiple de 2” est une proposition.

Remarque 2. La valeur de vérité d’une proposition dépend de sa (ses) variable(s) : elle peut donc être vraie ou fausse selon les valeurs de celle(s)-ci.

1.2 Connecteurs logiques

Les connecteurs logiques usuels sont : *non*, *et*, *ou*, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$. Ils permettent de créer, à partir d’une (ou deux) proposition(s), une nouvelle proposition dont la valeur de vérité dépend des valeurs de vérité de la (ou des) proposition(s) la constituant.

Définition 3. La **négation** de la proposition P est la proposition notée $\text{non}(P)$ qui est vraie lorsque P est fausse et fausse lorsque P est vraie.

Notation 2. La proposition $\text{non}(P)$ est aussi notée $\neg P$.

On représente les valeurs de vérités de $\text{non}(P)$ en fonction de celles de P dans une **table de vérité**, qui est un tableau de la forme suivante :

P	$\text{non}(P)$
V	F
F	V

Exemple 3. Pour $P = "k \text{ est un multiple de } 2"$, la négation est $\text{non}(P) = "k \text{ n'est pas un multiple de } 2"$.

Remarque 3. A noter que $\text{non}(\text{non}(P))$ a la même valeur de vérité que P .

Définition 4. La **conjonction** de deux propositions P et Q est la proposition notée " $P \text{ et } Q$ " qui est vraie lorsque les deux propositions P et Q sont vraies simultanément, et qui est fausse dans tous les autres cas.

Notation 3. La proposition $P \text{ et } Q$ est aussi notée $P \wedge Q$.

La table de vérité de la conjonction est :

P	Q	$P \text{ et } Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple 4. Si on considère la proposition $P = "k \text{ est un multiple de } 2"$ et la proposition $Q = "k \text{ est un multiple de } 3"$, alors la proposition " $P \text{ et } Q$ " est " $k \text{ est un multiple de } 6$ ".

Définition 5. La **disjonction** de deux propositions P et Q est la proposition notée " $P \text{ ou } Q$ " qui est vraie si au moins une des deux propositions P et Q est vraie, et qui est fausse quand les deux propositions P et Q sont fausses simultanément.

Notation 4. La proposition " $P \text{ ou } Q$ " est aussi notée $P \vee Q$.

La table de vérité de la disjonction est :

P	Q	$P \text{ ou } Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Remarque 4. Dans le langage courant, la disjonction "ou" est en général exclusive : l'expression "fromage ou dessert" signifie qu'on a droit soit à l'un, soit à l'autre, mais pas aux deux en même temps. Le connecteur "ou" logique est pour sa part inclusif : dans l'expression "je me tais ou je vais au tableau", on peut se taire et aller au tableau...

Remarque 5. Si on veut exprimer une disjonction exclusive "soit P soit Q " (donc l'un ou l'autre, pas les deux en même temps), on peut utiliser la proposition : " $(P \text{ et } \text{non}(Q)) \text{ ou } (\text{non}(P) \text{ et } Q)$ ".

Exemple 5. On reprend l'exemple 4 : quelle est la valeur de vérité de “ $(P \text{ ou } Q)(8)$ ” (qui signifie “ $P(8) \text{ ou } Q(8)$ ”), “ $(P \text{ ou } Q)(9)$ ”, “ $(P \text{ ou } Q)(10)$ ”, “ $(P \text{ ou } Q)(11)$ ”, “ $(P \text{ ou } Q)(12)$ ” ?

Définition 6. L'implication de la proposition P vers la proposition Q est la proposition notée “ $P \Rightarrow Q$ ” qui est fausse lorsque P est vraie et Q est fausse, et qui est vraie dans tous les autres cas.

Notation 5. La proposition “ $P \Rightarrow Q$ ” se lit “ P implique Q ”, “si P alors Q ”, “ P entraîne Q ”, “ P est une condition suffisante pour Q ”, “ Q est une condition nécessaire de P ”.

La table de vérité de l'implication est :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Remarque 6. L'implication “ $Q \Rightarrow P$ ” de la proposition Q vers la proposition P est appelée **implication réciproque** de l'implication “ $P \Rightarrow Q$ ” (qu'on appelle “implication directe” dans ce cas).