7 Equations différentielles du premier ordre

7.1 Introduction : exemple de la dynamique des populations

Pour appréhender la notion d'équation différentielle, nous allons commencer par considérer un exemple illustrant comment apparait ce type d'équation en sciences.

On considère une population constituée d'un très grand nombre d'individus : par exemple s'il s'agit d'organismes unicellulaires étudiés en laboratoire, on a facilement 10^5 à 10^6 individus. On choisit une unité qui est de l'ordre de grandeur de la taille de cette population à l'instant initial $t = 0$ (par exemple 1 unité représentera 10^5 individus) et on note $y(t)$ le nombre d'individus de cette population à l'instant t dans cette nouvelle unité. Le nombre $y(t)$ est un nombre décimal (à virgule) en raison de l'unité choisie : si à l'instant $t = 2$ il y $147233 = 1,47233.10^5$ individus alors $y(2) = 1,47233$. On veut étudier la fonction $t \mapsto y(t)$ lorsque t varie entre 0 et $+\infty$ (disons pour de grandes valeurs de t). Pour pouvoir modéliser l'évolution de y en fonction de t on fait les deux approximations suivantes :

Première approximation. On considère que $y(t)$ est un nombre qui évolue continuement dans le temps : par exemple, si l'unité est 10^5, la valeur de $y(t)$ ne "saute" pas de $1,00001$ (qui représente 100001 individus) à 1,00002 (qui représente 100002 individus) mais passe par toutes les valeurs intermédiaires comme $1,0000143483873$ (ce qui n'a pas vraiment de sens en terme de nombre d'individus ...).

Deuxième approximation. On suppose que pour tout instant $t \geq 0$ on connait le taux de croissance $\dfrac{y(t+h)-y(t)}{h}$ au cours du temps entre les deux instants t et $t+h$ (où $h > 0$), qu'on suppose très proches (c'est-à-dire qu'on suppose que h est presque égal à 0 : $h \simeq 0$). A priori ce taux de croissance dépend du nombre d'individus de la population entre les deux instants t et $t+h$, et comme $h \simeq 0$ on prend $y(t)$ comme population de référence sur cet intervalle de temps.

Dans un premier temps, on suit l'hypothèse de *Malthus (1765-1835)*, qui suppose que le taux de croissance de la population est proportionnel à $y(t)$ avec un rapport de proportionnalité fixe égal à une constante r :

$$\frac{y(t+h)-y(t)}{h} = r\,y(t)$$

Comme h est très proche de 0, on passe à la limite quand h tend vers 0 dans cette équation, et par définition de la dérivée on obtient

$$y'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{y(t+h)-y(t)}{h} = r\,y(t)$$

Cette relation doit être vraie pour tout instant $t \geq 0$, on obtient donc l'équation

$$\forall t \geq 0, \qquad y'(t) = r\,y(t)$$

qu'on écrit plus simplement

$$y' = ry \quad \text{sur } [0, +\infty[$$

C'est ce qu'on appelle une *équation différentielle linéaire d'ordre 1.* La difficulté particulière de ce type d'équation est que l'inconnue de cette équation n'est pas un nombre réel (comme dans l'équation $2x + 3 = -7$) mais une fonction : c'est la fonction y que l'on cherche à déterminer ...

On verra dans la suite que la seule solution de cette équation qui prend la valeur y_0 à l'instant 0 est la fonction

$$y(t) = y_0 e^{rt}$$

Dans ce modèle dû à Malthus, on voit que si le taux r est strictement positif alors $y(t)$ tend très vite vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$ (la fonction y a une croissance exponentielle dans ce cas) et que si r est strictement négatif alors $y(t)$ tend très vite vers 0 quand t tend vers $+\infty$ (la fonction y a alors une décroissance exponentielle). Ainsi, selon que la population a un taux de croissance positif ou négatif, son nombre d'individus croît très vite vers de grandes valeurs ou au contraire diminue très vite vers 0.

On va maintenant faire une hypothèse plus fine sur le taux de croissance de la population, qui a été proposée par *Verhulst (1804-1849)*, et qui consiste à supposer que le rapport de proportionnalité r n'est pas constant au cours du temps mais varie en sens inverse de $y(t)$ (cela correspond par exemple au fait que lorsque la population grandit, les ressources pour qu'elle se reproduise diminuent, et inversement si la population diminue elle a plus de ressources pour se développer). Dans le modèle le plus simple, on suppose que $r(t) = \alpha\,(K - y(t))$ où α et K sont des constantes positives. On obtient alors le taux de croissance

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} = \alpha\,(K - y(t))\,y(t)$$

et en passant à la limite quand h tend vers 0 on a

$$y'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} = \alpha\,(K - y(t))\,y(t)$$

c'est-à-dire que cette fois on obtient *l'équation différentielle d'ordre 1*

$$y' = \alpha\,(K - y)\,y \quad \text{sur } [0, +\infty[\,.$$

On peut vérifier que la solution de cette équation qui vaut y_0 à l'instant 0 est la fonction

$$y(t) = \frac{K\,y_0}{y_0 + (K - y_0)e^{-\alpha\,K\,t}}$$

Cette fois, comme $\alpha\,K > 0$, on voit que lorsque t tend vers $+\infty$ la fonction $y(t)$ tend vers la valeur limite K, qui représente d'une certaine manière l'ensemble des ressources disponibles : la population exploite au mieux son environnement ...

7.2 Etude des équations différentielles du premier ordre

On a vu dans la section précédente l'exemple le plus classique d'équation différentielle du premier ordre :

$$y' = ry \quad \text{sur } [0, +\infty[$$

Plus généralement, une **équation différentielle** est une équation qui fait intervenir une fonction y et certaines de ses dérivées (par exemple sa dérivée première y', sa dérivée seconde y'', et parfois les dérivées de ces dérivées), et qui doit être valable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit d'une équation différentielle qu'elle est **d'ordre 1** si elle ne fait intervenir que y et sa dérivée première y'. On dit qu'une équation différentielle qu'elle est **d'ordre 2** si elle ne fait intervenir que y, sa dérivée première y' et sa dérivée seconde y''.

Exemple 98. Les équations différentielles

$$y' = ry \quad \text{sur } [0, +\infty[$$

et

$$y' = \alpha\,(K - y)\,y \quad \text{sur } [0, +\infty[\,.$$

sont des équations d'ordre 1 puisqu'elles ne font intervenir que y et y'.

Définition 53. *Une équation différentielle* **linéaire** *d'ordre 1 est une équation du type*

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \quad \textit{pour tout } \; t \in I$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et a et b sont deux fonctions définies sur I.

Exemple 99. L'équation différentielle

$$y' = ry \quad \text{sur } [0, +\infty[$$

est une équation différentielle linéaire d'ordre 1, par contre l'équation différentielle

$$y' = \alpha\,(K - y)\,y = \alpha\,K\,y - \alpha\,y^2 \quad \text{sur } [0, +\infty[\,.$$

n'est pas linéaire à cause du terme y^2.

Les équations différentielles linéaires d'ordre 1 peuvent être résolues, comme le montre ce théorème :

7.1. Théorème — Equations différentielles linéaires.
On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$(E) \qquad y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \quad \text{pour tout } \; t \in I$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et a et b sont des fonctions continues sur I.
Soit t_0 un réel dans I et y_0 un réel, alors il existe une unique solution $y(t)$ de cette équation différentielle qui vaut y_0 au temps t_0.
Dans le cas particulier où $b = 0$, l'unique solution $y(t)$ de cette équation différentielle qui vaut y_0 au temps t_0 est donnée par la formule

$$y(t) = y_0 \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)$$

Dans le cas où $b \neq 0$, si on connait une solution $Y(t)$ de cette équation différentielle (E) alors toutes les solutions de (E) sont de la forme

$$y(t) = Y(t) + \beta \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)$$

pour un nombre réel β.

Définition 54. *Si on considère une équation différentielle linéaire d'ordre 1*

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \quad \textit{pour tout } \; t \in I$$

alors l'équation différentielle

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0 \quad \textit{pour tout } \; t \in I$$

est appelée **équation homogène associée**.

Exemple 100. Si on considère l'équation différentielle

$$y' = ry \quad \text{sur } [0, +\infty[$$

on peut la réécrire

$$y'(t) - r\,y(t) = 0 \quad \text{pour tout } t \in [0, +\infty[$$

Dans ce cas a est la fonction constante égale au nombre $-r$, donc $a(t) = -r$ pour tout $t \geq 0$. D'après le théorème, l'unique solution y de cette équation qui vaut y_0 à l'instant $t_0 = 0$ est la fonction

$$y(t) = y_0 \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right) = y_0 \exp\left(-\int_{0}^{t} -rds\right)$$

et comme une primitive de la fonction constante $a(s) = -r$ est la fonction $s \mapsto -rs$ on trouve

$$y(t) = y_0 \exp\left(-\left[-rs\right]_0^t\right) = y_0 \exp\left(-((-r \times t) - (-r \times 0))\right) = y_0\, e^{r\,t}$$

qui est bien la solution annoncée dans la section introductive.

Lorsque la fonction b n'est pas nulle, le théorème précédent ne donne pas de formule pour calculer une solution Y de l'équation. Pour en calculer une, on applique la méthode de la variation de la constante. Cette méthode consiste à chercher une solution $Y(t)$ de l'équation (E) sous la forme

$$Y(t) = C(t) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)$$

En dérivant cette fonction Y et en utilisant l'équation (E) on obtient une équation qui fait intervenir la dérivée de C, ce qui permet en général de trouver une formule pour C, et donc d'obtenir Y.

Exemple 101. On reprend le modèle de Malthus, mais cette fois on suppose qu'il y a une mortalité de la population qui donne par exemple l'équation

$$(E') \qquad y'(t) = r\,y(t) - \alpha t \quad \text{pour tout } t \in [0, +\infty[$$

avec $\alpha > 0$. Dans ce cas on voit que $a(t) = -r$ et $b(t) = -\alpha t$, et on a déjà calculé $\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right) = e^{rt}$. On cherche donc une solution $Y(t)$ de (E') sous la forme

$$Y(t) = C(t) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right) = C(t)e^{rt}$$

En dérivant Y on obtient

$$Y'(t) = C'(t)e^{rt} + C(t)r\,e^{rt} = C'(t)e^{rt} + r\,Y(t)$$

et comme Y doit être une solution de (E') on sait que $Y'(t) = r\,Y(t) - \alpha t$, donc en rassemblant ces deux équations on obtient $C'(t)e^{rt} = -\alpha t$ et donc $C'(t) = -\alpha\, t\, e^{-rt}$. On peut calculer une primitive de $-\alpha\, t\, e^{-rt}$ en intégrant par parties, et on trouve par exemple $C(t) = \frac{\alpha}{r}\left(t + \frac{1}{r}\right)e^{-rt}$ et donc une solution de (E') est

$$Y(t) = C(t)e^{rt} = \frac{\alpha}{r}\left(t + \frac{1}{r}\right)$$

et toutes les solutions de (E') sont de la forme

$$y(t) = \frac{\alpha}{r}\left(t + \frac{1}{r}\right) + \beta\, e^{rt}$$

pour un réel β.