5.6 Application de la dérivée à l'étude des fonctions

5.6.1 Monotonie

On a le résultat fondamental suivant :

5.15. Théorème– Dérivée et monotonie.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction numérique dérivable sur I.

- f est croissante sur I si et seulement si la fonction dérivée f' est positive ou nulle sur I. Autrement dit :

$$\text{"}\forall x \in I, \forall y \in I,\ [x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)]\text{"} \quad \Leftrightarrow \quad \text{"}\forall x \in I,\ f'(x) \geq 0\text{"}$$

- Si la fonction dérivée f' est strictement positive sur I (sauf en un nombre fini de points) alors f est strictement croissante sur I. En particulier :

$$\text{"}\forall x \in I,\ f'(x) > 0\text{"} \quad \Rightarrow \quad \text{"}\forall x \in I, \forall y \in I,\ [x < y \Rightarrow f(x) < f(y)]\text{"}$$

- f est décroissante sur I si et seulement si la fonction dérivée f' est négative ou nulle sur I.
- Si la fonction dérivée f' est strictement négative sur I (sauf en un nombre fini de points) alors f est strictement décroissante sur I.
- f est constante sur I si et seulement si la fonction dérivée f' est nulle sur I.

Exemple 79. Les fonctions ln et exp sont strictement croissantes sur leur ensemble de définition. En effet, on a

$$\text{pour tout réel } x > 0,\ \ln'(x) = \frac{1}{x} > 0 \text{ donc ln est strictement croissante sur }]0, +\infty[\,,$$

et

$$\text{pour tout réel } x,\ \exp'(x) = \exp(x) = e^x > 0 \text{ donc exp est strictement croissante sur } \mathbb{R}.$$

Exemple 80. De la même manière, pour $a > 0$ fixé la fonction $x \mapsto x^a = e^{a\ \ln(x)} = \exp(a\ \ln(x))$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ car sa dérivée est donnée pour tout $x > 0$ par

$$\exp'(a\ \ln(x)) \times (a\ \ln(x))' = \exp(a\ \ln(x)) \times \frac{a}{x} = x^a \times \frac{a}{x} = a\, x^{a-1}$$

qui est bien strictement positive sur $]0, +\infty[$.

Remarque 35. Attention, les hypothèse du Théorème 5.15 sont précises, et il doit être utilisé avec précision : en particulier, le fait que les résultats sont énoncés sur un intervalle est important. Par exemple, si on considère la fonction inverse $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$, alors il ne faut pas oublier que $\mathbb{R}^*$

n'est pas un interalle : c'est la réunion des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Si on dérive cette fonction, on obtient que sa dérivée, pour tout réel x non nul, est

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Cette dérivée est strictement négative sur $\mathbb{R}^*$, donc f est strictement décroissante sur chacun des deux intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, mais elle n'est pas strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ puisque $-1 < 1$ et pourtant $f(-1) = -1 < 1 = f(1)$ (si f était strictement décroissante on devrait avoir $f(-1) > f(1)$).

Le théorème 5.15 permet de retrouver le résultat suivant :

5.16. PROPRIÉTÉ – COMPOSITION ET MONOTONIE.

Soit f et g deux fonctions numériques dérivables. On suppose que f est définie sur un intervalle I.
Dans le cas où g est définie et croissante sur $f(I)$, alors

- si f est croissante sur I alors la composée $g \circ f$ est croissante sur I
- si f est décroissante sur I alors la composée $g \circ f$ est décroissante sur I

Dans le cas où g est définie et décroissante sur $f(I)$, alors

- si f est croissante sur I alors la composée $g \circ f$ est décroissante sur I
- si f est décroissante sur I alors la composée $g \circ f$ est croissante sur I

Esquisse de preuve. On peut en fait démontrer ce résultat de deux façons. On le fait par exemple dans le cas suivant : g est croissante et f est décroissante.
Première méthode. On regarde directement si $g \circ f$ est décroissante en prenant deux éléments x et y de I tels que $x \leq y$: comme f est décroissante on a $f(x) \geq f(y)$, et comme g est croissante cela donne $g(f(x)) \geq g(f(y))$, et donc $g \circ f(x) \geq g \circ f(y)$. Puisque cela est valable pour tous les choix $x \leq y$ cela indique que $g \circ f$ est décroissante.
Deuxième méthode. On sait que la dérivée de $g \circ f$ sur I est donnée pour tout x par

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

et comme g est croissante sa dérivée g' est positive, f est décroissante donc sa dérivée f' est négative, et on en déduit que la dérivée de $g \circ f$ est négative et donc la fonction $g \circ f$ est décroissante. $\square$

Exemple 81. On note P la pression d'un gaz et T sa température. Si on sait que la fonction $\ln(P)$ est une fonction croissante de T, alors comme la fonction exp est croissante on en déduit que $\exp \circ \ln(P) = e^{\ln(P)} = P$ (car exp est la réciproque de ln) est une fonction croissante de T.

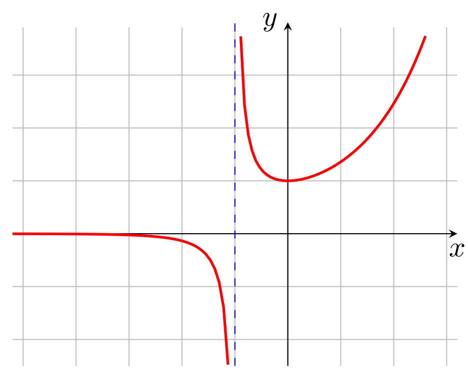
5.6.2 Tableau de variations

Puisque le signe de la dérivée de f permet de connaitre le sens de variations de la fonction f sur les intervalles, une première partie de l'étude d'une fonction f consiste à calculer sa dérivée f' et à étudier son signe : on en déduit les intervalles sur lesquels f' est positive ou négative, et par conséquent les intervalles sur lesquels f est croissante ou décroissante. On rassemble ces informations dans un tableau de variations, dans lequel on indique :

- le signe de la dérivée f' (indiqué par $+$ ou $-$),
- le sens de variations de la fonction f (“croissant” et “décroissant” étant symbolisés par les flèches $\nearrow$ et $\searrow$),
- les valeurs de f au(x) point(s) où la dérivée f' s’annule,
- les limites éventuelles en $-\infty$, $+\infty$ et en les points où f n’est pas définie.

Exemple 82. Pour la fonction f définie pour x dans $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$ on a $f'(x) = \dfrac{xe^x}{(1+x)^2}$ et on obtient le tableau de variations :

	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f'		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



5.6.3 Recherche des extrema locaux

Définition 47. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, c un réel dans I et f une fonction numérique. On dit que f atteint son* **minimum sur** *I au point c si $f(x) \geq f(c)$ pour tout $x \in I$; dans ce cas le minimum de f sur I vaut $f(c)$. On dit que f atteint son* **maximum sur** *I au point c si $f(x) \leq f(c)$ pour tout $x \in I$; dans ce cas le maximum de f sur I vaut $f(c)$.*
Lorsque l’intervalle I est égal à l’ensemble de définition de f, on parle de **minimum global** *de f, ou de* **maximum global** *selon le cas. Lorsque l’intervalle I est strictement inclus dans l’ensemble de définition de f, on parle de* **minimum local** *de f, ou de* **maximum local**.
Le terme **extremum** *(au pluriel extrema) recouvre toutes les notions ci-dessus.*

La propriété suivante se voit directement sur le tableau de variations :

5.17. Propriété – Extrema locaux et dérivée.

> Si f atteint un minimum ou un maximum local en c sur l’intervalle $]a, b[$ (donc avec $a < c < b$) et si f est dérivable en c alors on a $f'(c) = 0$.
> En particulier, la tangente au graphe de f au point $(c, f(c))$ a pour pente $f'(c) = 0$: c’est donc une droite horizontale.

En effet, sur le tableau de variations on voit qu’un minimum local correspond au cas où la dérivée change de signe et s’annule en c : un peu avant c la dérivée est négative (donc la fonction est décroissante un peu avant c) et un peu après c la dérivée est positive (donc la fonction est croissante un peu après c). Le cas d’un maximum local est similaire : là aussi la dérivée s’annule, mais elle est positive avant c et négative après.

Exemple 83. Dans l'exemple 82 ci-dessus, la fonction f atteint son minimum sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ au point $x = 0$, qui vaut $f(0) = 1$. Par contre elle atteint des valeurs strictement négatives sur $]-\infty,-1[$: le point $x = 0$ est donc un point où f atteint un minimum local et pas global. D'ailleurs cette fonction n'a pas de minimum (ni de maximum) global sur $\mathbb{R}$.

Exemple 84. La fonction exponentielle n'a ni minimum ni maximum global sur $\mathbb{R}$.

La propriété 5.17 est importante puisqu'elle indique que si on cherche les points où f atteint son minimum ou son maximum dans un intervalle $]a,b[$ il suffit de calculer les solutions de $f'(x) = 0$: en effet le(s) point(s) où f atteint un minimum ou un maximum local (s'il y en a) se trouvera parmi les solutions de $f'(x) = 0$.

Exemple 85. Si on étudie la fonction sin sur $[0,2\pi]$ alors on voit que sa dérivée $\sin'(x) = \cos(x)$ s'annule aux points $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$. Les changements de signe de la dérivée et le tableau de variations :

	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\sin' = \cos$		$+$	0	$-$	0	$+$	
			1				0
$\sin$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	0				-1		

indiquent que sin atteint son minimum sur $[0,2\pi]$ en $\frac{3\pi}{2}$ et son maximum en $\frac{\pi}{2}$.

5.6.4 Convexité, concavité, points d'inflexion

On a déjà vu que si f est dérivable en x_0 alors la tangente au graphe de f en $(x_0, f(x_0))$ a pour équation

$$y \;=\; f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

et ainsi le graphe de f se rapproche de cette droite autour du point $(x_0, f(x_0))$. Pour tracer plus précisément le graphe de f, on se pose la question de savoir de quel côté de cette tangente se trouve le graphe de f près du point $(x_0, f(x_0))$: au-dessus, au-dessous, ou alternativement l'un puis l'autre ? C'est l'une des raisons pour introduire les notions suivantes :

Définition 48. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, on dit que f est* **convexe sur** *I si sa dérivée est croissante sur I.*
On dit que f est **concave sur** *I si sa dérivée est décroissante sur I.*

Remarque 36. Puisque la dérivée de $-f$ est $(-f)' = -f'$, et puisque la fonction f' est croissante si et seulement si $-f'$ est décroissante, on en déduit que f est convexe sur l'intervalle I si et seulement si $-f$ est concave sur cet intervalle.

Cette notion nous intéresse particulièrement en raison de la propriété suivante :

5.18. Propriété – Convexité / concavité et position graphe / tangente.
Soit f une fonction numérique dérivable sur I alors

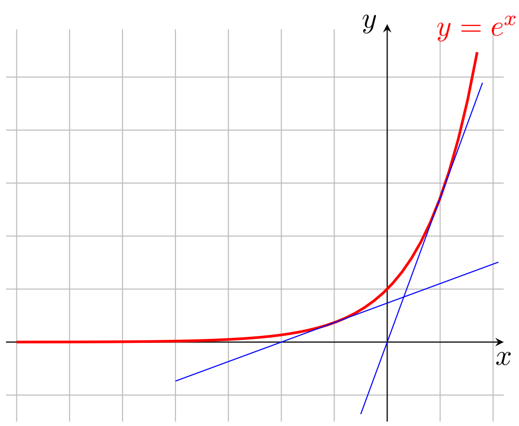
- si f est convexe sur I, alors le graphe de f est au-dessus de toutes ses tangentes sur I,
- si f est concave sur I, alors le graphe de f est au-dessous de toutes ses tangentes sur I.

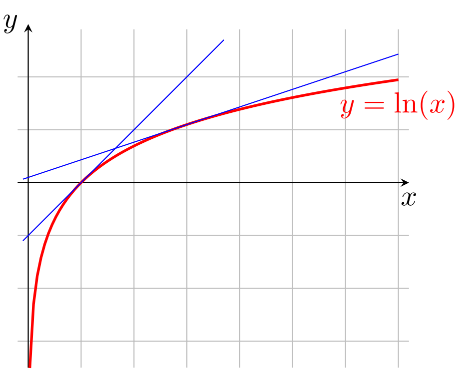
Preuve. On étudie uniquement le cas où f est convexe. Pour démontrer que le graphe de f est au-dessus de toutes ses tangentes sur l'intervalle I, on choisit un point x_0 dans I, on remarque que la tangente au graphe au point $(x_0, f(x_0))$ a pour équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ et le graphe est au-dessus de cette tangente si et seulement si la fonction $g(x) = f(x) - [f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)]$ est positive sur I. En dérivant g, on trouve $g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$ et, comme la fonction f est convexe, sa dérivée f' est croissante et donc le tableau de variations de g est

		x_0	
$g'(x) = f'(x) - f(x_0)$	$-$	0	$+$
g	$\searrow$	0	$\nearrow$

On déduit de ce tableau que la fonction g est bien positive sur I, et donc le graphe de la fonction f est au-dessus de sa tangente au point $(x_0, f(x_0))$: comme cela est vrai pour tous les points x_0 dans I, le graphe de f est bien au-dessus de toutes ses tangentes sur I. $\square$

Exemple 86. La fonction exponentielle $\exp : x \mapsto e^x$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, qui est égale à sa dérivée $\exp' = \exp$ sur $\mathbb{R}$, et comme cette fonction est croissante on en déduit que exp est convexe : son graphe est donc au-dessus de toutes ses tangentes sur $\mathbb{R}$. De même, la fonction logarithme népérien $\ln : x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et a pour dérivée la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$: cette fonction est décroissante sur $]0, +\infty[$ donc la fonction ln est concave sur cet intervalle, et son graphe est au-dessous de toutes ses tangentes. On a alors les tracés :





Pour savoir si une fonction f est convexe ou concave sur un intervalle I, il suffit d'étudier le sens de variations de sa dérivée f' : pour cela il suffit de calculer la dérivée de f' et d'étudier son signe. On introduit donc la notion suivante :

Définition 49. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, si sa dérivée f' est dérivable sur I on dit que f* **est deux fois dérivable sur** *I. On note alors f'' la dérivée de f', et on l'appelle* **dérivée seconde de** *f sur I.*

La propriété suivante se déduit directement des définitions ci-dessus.

5.19. Propriété – Convexité / concavité et dérivée seconde.

Si f est deux fois dérivable sur I alors

- f est convexe sur I si et seulement si sa dérivée seconde f'' est positive sur I,
- f est concave sur I si et seulement si sa dérivée seconde f'' est négative sur I.

Exemple 87. La fonction $f : x \mapsto x^2$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et a pour dérivée et dérivée seconde sur $\mathbb{R}$:

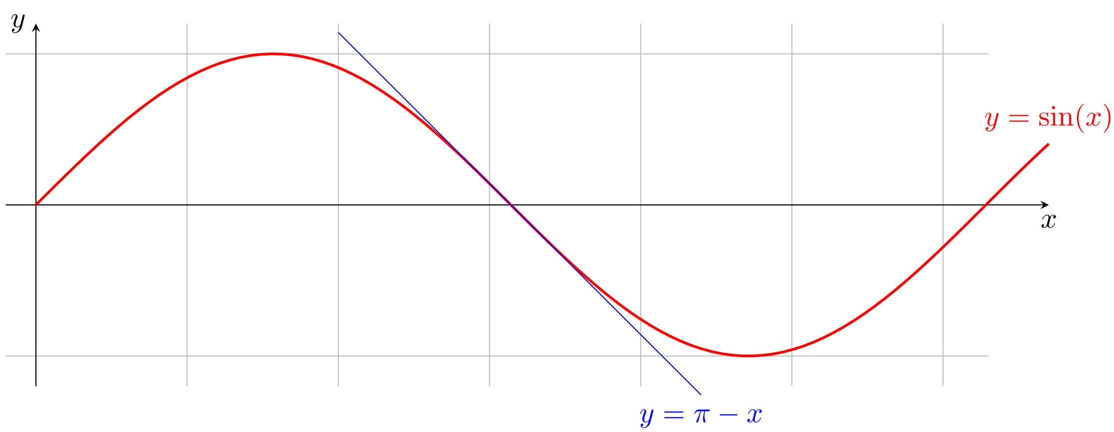
$$f'(x) = 2x \qquad et \qquad f''(x) = 2$$

Puisque sa dérivée seconde est positive sur $\mathbb{R}$, la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.

En un point x_0 où la dérivée seconde f'' d'une fonction f change de signe, le graphe de cette fonction traverse sa tangente. Par exemple si f'' est positive avant x_0 alors f est convexe avant x_0 et donc son graphe est au-dessus de ses tangentes, et si f'' est négative après x_0 alors f est concave après x_0 et son graphe est au-dessous de ses tangentes : dans ce cas, le graphe de f est au-dessus de sa tangente au point $(x_0, f(x_0))$ avant x_0 et au-dessous après, donc il "traverse" sa tangente en ce point. On donne un nom particulier à ce type de points :

Définition 50. *Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I, un point x_0 de I est appelé* **point d'inflexion de** f *si sa dérivée seconde f'' change de signe au point x_0.*

Exemple 88. Si on considère la fonction sinus $\sin : x \mapsto \sin(x)$ alors elle est deux fois dérivable sur $[0, 2\pi]$ et sa dérivée seconde est $\sin''(x) = -\sin(x)$ qui change de signe en π : sur $[0, \pi]$ la dérivée seconde $-\sin$ est négative et donc sin est concave, et sur $[\pi, 2\pi]$ cette dérivée seconde est positive et donc sin est convexe. Au point $x_0 = \pi$, la tangente de sin est $y = (-1) * (x - \pi) + 0$ et le graphe de sin passe donc de au-dessous de sa tangente à au-dessus :



5.6.5 Tracé du graphe d'une fonction

En vue de tracer le graphe d'une fonction numérique f, on procède selon les étapes suivantes :

- on détermine le domaine de définition de f;
- on calcule les limites de f aux bords de son domaine de définition;
- on étudie les asymptotes éventuelles de f en $-\infty$ et $+\infty$;
- on calcule la dérivée f' et on donne le tableau de variations de f, en faisant apparaitre les extrema (locaux et/ou globaux);
- on calcule la dérivée seconde f'', on étudie son signe pour déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave, et on trouve les points d'inflexion.
- enfin pour tracer le graphe de f on reporte les asymptotes, les directions asymptotiques, les tangentes horizontales aux points où f atteint un extremum et les points d'inflexion : on a alors suffisamment d'indications pour tracer l'allure du graphe.

On traitera de manière étendue en cours le cas de la fonction Gaussienne $f : x \mapsto e^{-x^2}$, pour obtenir le graphe suivant :