Licence Sciences et Techniques

L1 INFO MATH PC SI

M11 - M15 - M16 - M17
Mathématiques 1

Recueil d'exercices.

Gloria Faccanoni
http://faccanoni.univ-tln.fr/enseignement.html

Thierry Champion
http://champion.univ-tln.fr/enseignement.html

Année 2023 – 2024

Table des matières

Les exercices de ce recueil, dont les corrigés sont disponibles en ligne, sont de difficulté variée, et doivent vous permettre de vous former aux bases du calcul différentiel, nécessaire à toute formation scientifique. Une méthode d'étude efficace consiste à chercher activement la solution d'un exercice (en écrivant ses tentatives au brouillon !), avant de chercher éventuellement de l'aide (soit auprès d'un camarade ou d'un enseignant, soit en consultant le début de la correction), et enfin de passer à une rédaction propre de la solution.

Ce recueil a été mis au point sur plusieurs années par G. Faccanoni, et légèrement retravaillé par T. Champion depuis 2020. Il contient encore très certainement des erreurs, malgré de nombreuses relectures, que vous êtes encouragé-e-s à signaler à : thierry.champion@univ-tln.fr

1

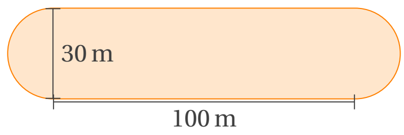
Méthodologie disciplinaire

Géométrie

Exercice 1.1

La piste de course d'un stade entoure le terrain qui a la forme d'un rectangle dont les deux côtés sont dotés de demi-cercles. Si la longueur du rectangle est de 100 m et sa largeur est de 30 m, quelle est la longueur de la piste ?

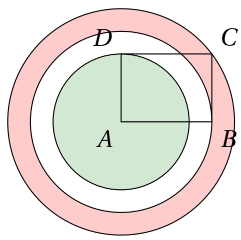
Correction



La longueur de la piste est de $2 \times 100\,\text{m} + \pi \times 2 \times 15\,\text{m} \simeq 294.2\,\text{m}$

Exercice 1.2

Considérons un rectangle $ABCD$ et les trois cercles ayant pour centre A et pour rayons $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ et $\overline{AD}$. Colorions ensuite la couronne de frontières les deux cercles de rayon $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ et le disque de rayon $\overline{AD}$. Laquelle des deux zones coloriées possède l'aire la plus grande ?



Correction

On a $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2$ donc l'aire de la couronne vaut $\pi((\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2) - \overline{AB}^2) = \pi \overline{AD}^2$. L'aire du disque vaut $\pi \overline{AD}^2$. On en conclut donc que les deux aires sont égales.

Exercice 1.3 (Le tour du monde — MathC2+)

On ceinture la planète avec une corde au niveau de l'équateur. Quelle longueur de corde faut-il ajouter à cette ceinture si on veut l'écarter d'un mètre de la surface de la Terre sur toute la circonférence ? NB. Le rayon de la Terre est de 6400km environ.

Même question pour un ballon de handball (le rayon d'un tel ballon est d'environ 16cm).

Correction

Calcul

Exercice 1.4

Sans utiliser la calculatrice mettre sous forme de fraction irréductible les expressions suivantes :

$$A = \frac{51}{136}, \quad B = \frac{1015}{2\,450}, \quad C = \frac{9}{40} + \frac{9}{50} + \frac{18}{125}, \quad D = 1 - \frac{27}{125} - \frac{549}{1\,000},$$

$$E = \frac{549}{1\,000} + 2 \times \frac{235}{1\,000}, \quad F = 0{,}000\,001\,25, \quad G = \frac{\frac{4}{7} - \frac{1}{8}}{\frac{5}{9}}.$$

Correction

$$A=\frac{3\times 17}{2^3\times 17}=\frac{3}{8},\qquad B=\frac{5\times 7\times 29}{2\times 5^2\times 7^2}=\frac{29}{70},$$
$$C=\frac{3^2}{2^3\times 5}+\frac{3^2}{2\times 5^2}+\frac{2\times 3^2}{5^3}=\frac{3^2\times(5^2+2^2\times 5+2^4)}{2^3\times 5^3}=\frac{549}{1\,000},\qquad D=1-\frac{3^3}{5^3}-\frac{3^2\times 61}{2^3\times 5^3}=\frac{47}{200},$$
$$E=\frac{3^2\times 61}{2^3\times 5^3}+2\times\frac{5\times 47}{2^3\times 5^3}=\frac{1\,019}{1\,000},\qquad F=125\times 10^{-9}=5^3\times 2^{-9}\times 5^{-9}=2^{-3}\times 10^{-6}=\frac{1}{800\,000},$$
$$G=\frac{\frac{4}{7}-\frac{1}{8}}{\frac{5}{9}}=\left(\frac{4}{7}-\frac{1}{8}\right)\cdot\frac{9}{5}=\frac{4\times 8-1\times 7}{56}\cdot\frac{9}{5}=\frac{25}{56}\cdot\frac{9}{5}=\frac{45}{56}$$

Exercice 1.5

Sans utiliser la calculatrice, calculer

$A)$12.5% de 164 $\qquad$ $B)$13% de 50% de 800 $\qquad$ $C)\dfrac{300}{30\%}$ $\qquad$ $D)14\times 5\%$ $\qquad$ $E)(412-518)\times 116\%$

Correction

$A)$ $(12.5/100)*164=20.5$, $\quad B)$ 52, $\quad C)$ 1 000, $\quad D)$ 0.7, $\quad E)$ -122.96.

Exercice 1.6

Sans utiliser la calculatrice, établir laquelle des expressions suivantes a la plus grande valeur :

i) $\frac{4}{7}$, $\quad\frac{5}{9}$, $\quad\frac{7}{10}$, $\quad\frac{5}{8}$;

ii) $\sqrt{100+69}$, $\quad\sqrt{100}\times\sqrt{9}$, $\quad\dfrac{\sqrt{100}}{\sqrt{6}}$,

Correction

i) On peut calculer : ppcm$(7;9;10;8)$ =ppcm$(7;3^2;2\times 5;2^3)=2^3\times 3^2\times 5\times 7=2\,520$ et on a

$$\frac{4}{7}=\frac{4\times(5\times 8\times 9)}{2\,520}=\frac{1\,440}{250},\quad \frac{5}{9}=\frac{5\times(5\times 7\times 8)}{2\,520}=\frac{1\,400}{250},\quad \frac{7}{10}=\frac{7\times(7\times 4\times 9)}{2\,520}=\frac{1\,764}{250},\quad \frac{5}{8}=\frac{5\times(5\times 7\times 9)}{2\,520}=\frac{1\,575}{250},$$

donc $\frac{5}{9}<\frac{4}{7}<\frac{5}{8}<\frac{7}{10}$.

On peut aussi comparer les fractions deux à deux, par exemple $7\times 5<4\times 9$ donc $\frac{5}{9}<\frac{4}{7}$.

ii) $\sqrt{100+69}=\sqrt{169}=13$, $\quad\sqrt{100}\times\sqrt{9}=10\times 3=30$, $\quad\dfrac{\sqrt{100}}{\sqrt{6}}=\dfrac{10}{\sqrt{6}}$, $\quad$ donc

$$\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{6}}<\sqrt{100+69}<\sqrt{100}\times\sqrt{9}.$$

Exercice 1.7

Soit $x\in\mathbb{R}$. On donne $A=2x$, $B=4x^2-1$. Calculer les expressions suivantes en fonction de x :

$$C=2xB-A,\qquad D=2xC-B,\qquad E=2xD-C.$$

Correction

$$C=2x(4x^2-1)-(2x)=4x(2x^2-1),$$
$$D=2x(4x(2x^2-1))-(4x^2-1)=(4x^2-2x-1)(4x^2+2x-1),$$
$$E=2x(4x^2-2x-1)(4x^2+2x-1)-(4x(2x^2-1))=2x(2x-1)(2x+1)(4x^2-3).$$

Exercice 1.8
Soit $n \in \mathbb{N}$. Factoriser les expressions suivantes :

a) $2001^2 - 1999^2$

b) $\dfrac{n^2-1}{9} - \dfrac{n+1}{6}$,

c) $\dfrac{(n-2)(n+1)}{4} + 4\dfrac{n+1}{3}$,

d) $\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6} - \dfrac{(n+1)^2}{4}$,

Correction

a) $2001^2 - 1999^2 = (2001-1999)(2001+1999) = 2 \times 4000 = 8000$

b) $\dfrac{n^2-1}{9} - \dfrac{n+1}{6} = \dfrac{(n+1)(2n-5)}{18}$,

c) $\dfrac{(n-2)(n+1)}{4} + 4\dfrac{n+1}{3} = \dfrac{(3n+10)(n+1)}{12}$,

d) $\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6} - \dfrac{(n+1)^2}{4} = \dfrac{n^2-1}{12}$,

Logarithmes et exponentielles

Exercice 1.9
Soit x un nombre réel. On pose $f(x) = x^2 \ln(x)$. Compléter le tableau suivant :

$x =$	e	$\frac{1}{e}$	$\sqrt{e}$	e^2	$e\sqrt{e}$	$\frac{1}{e^2}$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$
$f(x) =$							

Correction

$x =$	e	$\frac{1}{e}$	$\sqrt{e}$	e^2	$e\sqrt{e}$	$\frac{1}{e^2}$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$
$f(x) =$	e^2	$-\frac{1}{e^2}$	$\frac{e}{2}$	$2e^4$	$\frac{3}{2}e^3$	$-\frac{2}{e^4}$	$-\frac{1}{2e}$

Exercice 1.10
Calculer ou simplifier.

a) $\log_{10}(1000)$

b) $\log_5(1/25)$

c) $\ln(e^{\sqrt{2}})$

d) $\log_{10}(10) + \log_{10}(4)$

e) $\log_{10}(10) - \log_{10}(4)$

f) $\log_{10}(10)\log_{10}(4)$

g) $\log_3(108) - \log_3(4)$

h) $\log_{10}(0.1)$

i) $\log_{10}(100/67)$

j) $3\log_{10}(10)$

k) $\log_{10}(1)$

l) $\log_2(8)$

m) $\log_2(0.25)$

n) $\ln(1/e)$

o) $(\ln(e))^{-1}$

Correction

a) 3

b) -2

c) $\sqrt{2}$

d) $1 + 2\frac{\ln(2)}{\ln(10)}$

e) $1 - 2\frac{\ln(2)}{\ln(10)}$

f) $2\frac{\ln(2)}{\ln(10)}$

g) 3

h) -1

i) $2 - \log_{10}(67)$

j) 3

k) 0

l) 3

m) -2

n) -1

o) 1

Exercice 1.11
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \ln(\sqrt{3}+1) + \ln(\sqrt{3}-1), \quad B = \ln((\sqrt{3}+1)^{18}) + \ln((\sqrt{3}-1)^{18}), \quad C = \ln(1+\cos(x)) + \ln(1-\cos(x)) - 2\ln(\sin(x)),$$

$$D = \frac{\ln(2x)}{\ln(x)} \text{ (ici } x \neq 1), \quad E = (\ln(x))^2 - \ln(x^2), \quad F = (\ln(x))^2 - \ln(x^2) + 1.$$

Correction

- ⋆ $A=\ln(2)$,
- ⋆ $B=18\ln(2)$,
- ⋆ $C=\ln(1+\cos(x))+\ln(1-\cos(x))-2\ln(\sin(x))=\ln\left(\frac{(1+\cos(x))(1-\cos(x))}{\sin^2(x)}\right)=\ln\left(\frac{1-\cos^2(x)}{\sin^2(x)}\right)=\ln(1)=0$,
- ⋆ $D=\frac{\ln(2)}{\ln(x)}+1$,
- ⋆ $E=\ln^2(x)-2\ln(x)=(\ln(x)-2)\ln(x)$,
- ⋆ $F=\ln^2(x)-2\ln(x)+1=(\ln(x)-1)^2$.

Puissances

Exercice 1.12

Soit $n=10^{45}$, calculer $-\frac{1}{n^{2/3}}$.

Correction

-10^{-30}

Exercice 1.13

Simplifier les expressions suivantes autant que possible :

a) $(2^2)^2$ *b)* $2^{(2^2)}$ *c)* $(2^2)^3$ *d)* $2^{(2^3)}$ *e)* $\left(\frac{1}{3}\right)^x 9^{\frac{x}{2}}$ *f)* $\frac{a^{-4}(b^2)^3(a^2b)^{-1}}{(ab^3)^2b^{-1}}$.

Correction

$$a)(2^2)^2=4^2=16 \qquad b)2^{2^2}=2^4=16 \qquad c)(2^2)^3=4^3=64$$

$$d)2^{2^3}=2^8=256 \qquad e)\left(\frac{1}{3}\right)^x 9^{\frac{x}{2}}=3^{2\frac{x}{2}-x}=3^0=1 \qquad f)\frac{a^{-4}(b^2)^3(a^2b)^{-1}}{(ab^3)^2b^{-1}}=\frac{1}{a^8}$$

Exercice 1.14

Calculer, factoriser ou simplifier (quand c'est possible) :

a) $(e^3)^6$ b) e^3e^6 c) e^3+e^6 d) $e^{-6}e^8$ e) 2^44^7 f) 2^4e^5

Correction

a) e^{18} b) e^9 c) $e^3(1+e^3)$ d) e^2 e) 2^{18} f) $(2e)^4e$

Exercice 1.15

Soit n un entier naturel et x un réel strictement positif. Simplifier :

$$A=1\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{2^5} \qquad B=(\sqrt[6]{3})^3 \qquad C=\sqrt[5]{3}\sqrt[3]{9}\sqrt[15]{3^2} \qquad D=\frac{(x^2)^n}{x^{n+1}} \qquad E=\frac{x^3x^{5n}}{x^{2n}x^5}$$

$$F=(x^{-n+1})^2(x^3)^{n-2} \qquad G=\sqrt{2^{2^{(2n+1)}}} \qquad H=(2^{2n})^{(2n)^{2^n}} \qquad I=\frac{2\times\left((2^{2n-1})^2\right)^{2^n}}{8^{n^2}}$$

Correction

$$A=2^{1/3}\times2^{5/3}=2^2 \qquad B=3^{3/6}=3^{1/2}=\sqrt{3} \qquad C=3^{1/5}\times3^{2/3}\times3^{2/15}=3 \qquad D=x^{n-1} \qquad E=x^{3n-2}$$

$$F=x^{n-4} \qquad G=2^{2^{2n}}=2^{4^n} \qquad H(4^n)^{(2n)^{2^n}} \qquad I=2\frac{16^{n2^n}}{4^{2^n}8^{n^2}}$$

Équations et inégalités

Exercice 1.16

Calculer la valeur de l'inconnue x :

1. $\sqrt{x^2}=1$
2. $(\sqrt{x})^2=1$
3. $\dfrac{30}{75}=\dfrac{20}{x}$
4. $\dfrac{4}{x+5}=\dfrac{5}{x-23}$
5. $\dfrac{6x}{x+14}=\dfrac{6}{8}$
6. $\dfrac{(55x-38)\times 4}{11}=\dfrac{4}{\frac{3}{8}}$
7. $\dfrac{\sqrt{x}}{8}=\dfrac{4}{\sqrt{x}}$
8. $-3(4-x)=\frac{x}{2}-(2-(3+2x))(3-4)$
9. $35x+3(18-26x+4^2)=70-3x$

Correction

1. $x^2\geq 0$ donc $x=\pm 1$
2. $x\geq 0$ donc $x=1$
3. $x\neq 0$ et $x=20\times\dfrac{75}{30}=50$
4. $x\neq -5$, $x\neq 23$ et $4(x-23)=5(x+5)$ donc $x=-117$
5. $x\neq -14$ et $8\times(6x)=6\times(x+14)$ donc $x=2$
6. $(55x-38)=\dfrac{4}{3/8}\times\dfrac{11}{4}$ d'où $55x=\dfrac{88}{3}+38$ donc $x=\dfrac{88+3\times 38}{3\times 55}=\dfrac{202}{165}$
7. $x\geq 0$ et $\sqrt{x}\times\sqrt{x}=4\times 8$ d'où $x=32$
8. $-3(4-x)=\frac{x}{2}-(2-(3+2x))(3-4) \iff -12+3x=\frac{x}{2}+(2-3-2x) \iff -12+3x=\frac{x}{2}-1-2x \iff 3x-\frac{x}{2}+2x=-1+12 \iff \frac{10-1}{2}x=11 \iff x=\frac{22}{9}$
9. $35x+3(18-26x+4^2)=70-3x \iff 35x+54-78x+48=70-3x \iff 32=40x \iff x=\frac{32}{40}=\frac{4}{5}$

Exercice 1.17

Indiquer comment choisir x pour que l'on ait

1. $x^2>10\,000$,
2. $\frac{1}{x}>10\,000$,
3. $\frac{1}{x}<10^{-6}$,
4. $x^2<0{,}000\,1$,
5. $\frac{1}{x}>0{,}000\,1$,
6. $x^2>1$.

Correction

1. $|x|>10^2$,
2. $0<x<10^{-4}$,
3. $x<0$ ou $x>10^6$,
4. $|x|<0.01=10^{-2}$,
5. $0<x<10^4$,
6. $|x|>1$.

Exercice 1.18

Trouver le plus petit entier n tel que 2^n soit supérieur à 1000. En déduire la partie entière de $\log_2(1000)$.

Correction

On cherche $\min\left\{\, n\in\mathbb{N} \,\middle|\, 2^n>10^3 \,\right\}$, *i.e.*

$$\begin{aligned}\min\left\{\, n\in\mathbb{N} \,\middle|\, n>\log_2(10^3) \,\right\} &= \min\left\{\, n\in\mathbb{N} \,\middle|\, n>3\log_2(10) \,\right\}\\ &= \min\left\{\, n\in\mathbb{N} \,\middle|\, n>3\log_2(2\times 5) \,\right\}\\ &= \min\left\{\, n\in\mathbb{N} \,\middle|\, n>3(1+\log_2(5)) \,\right\}=10.\end{aligned}$$

En effet $2^9=516$, $2^{10}=1024$. Donc $E(\log_2(1000))=9$.

Exercice 1.19

Trouver toutes les solutions dans $\mathbb{R}$ des inégalités suivantes (pour chaque inégalité, la réponse est indiquée à droite) :

1. $\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x-2}<1+\dfrac{1}{4-x^2}$ .... $]-\infty,-2[\cup]-1,1[\cup]+2,+\infty[$
2. $x|x|<1$ .... $]-\infty,1[$
3. $x^2-4|x|-5>0$ .... $]-\infty,-5[\cup]5,+\infty[$
4. $|4-x^2|-|3-x|>x$ .... $]-\infty,-\sqrt{7}[\cup]-1,1[\cup]+\sqrt{7},+\infty[$
5. $|x+2|<1+|x-1|$ .... $]-\infty,0[$
6. $\sqrt{2x+1}>x$ .... $[-1/2,1+\sqrt{2}[$
7. $\sqrt{x+2}<x$ .... $]2,+\infty[$
8. $\sqrt{x^2-5x+4}<x-1$ .... $[4,+\infty[$
9. $\sqrt{\dfrac{x^2+8|x|-9}{x^2-1}}\geq x-3$ .... $\left]-\infty,\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right]\setminus\{-1,1\}$

Géométrie analytique

Exercice 1.20 (Droites)

1. Trouver l'équation de la droite passant par $(2,3)$ et parallèle à la droite passant par $(7,9)$ et $(3,-2)$.
2. Trouver l'équation de la droite passant par $(2,6)$ et $(3,10)$. Quelle est sa pente ? Trouver l'équation d'une droite qui lui est parallèle et qui passe par $(7,2)$. Quelles sont les intersections de cette droite avec les axes ?
3. Trouver l'équation de la droite passant par $(5,-3)$ et possède une pente de 4. Trouver l'équation de la droite qui est parallèle à la droite d'équation $5x+3y=9$ et qui passe par $(2,5)$. Trouver l'intersection entre les deux droites.

Correction

1. Les droites qui passent par $(2,3)$ ont équation $y=m(x-2)+3$ pour $m\in\mathbb{R}$. La droite passant par $(7,9)$ et $(3,-2)$ a pente $\frac{-2-9}{3-7}=\frac{11}{4}$. Par conséquent, la droite cherchée a équation $y=\frac{11}{4}(x-2)+3$.
2. La droite passant par $(2,6)$ et $(3,10)$ a équation $y=\frac{10-6}{3-2}(x-2)+6$. Sa pente est 4. L'équation de la droite qui lui est parallèle et qui passe par $(7,2)$ est $y=4(x-7)+2$. Les intersections de cette droite avec les axes sont $(0,-26)$ et $(13/2,0)$.
3. L'équation de la droite passant par $(5,-3)$ et de pente de 4 est $y=4(x-5)-3$. L'équation de la droite qui est parallèle à la droite d'équation $5x+3y=9$ et qui passe par $(2,5)$ est $y=-\frac{5}{3}(x-2)+5$. L'intersection entre les deux droites est $(94/17,-15/17)$.

Exercice 1.21 (Cercles)

1. Trouver l'équation du cercle de centre $(-2,-5)$ et rayon 6.
2. Établir pour quelles valeurs du paramètre $k\in\mathbb{R}$ l'équation $x^2+y^2+kx-2y+k^2-2=0$ représente un cercle. Ensuite, en calculer le centre.

Correction

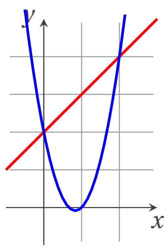
1. $(x+2)^2+(y+5)^2=6^2$
2. $0=x^2+y^2+kx-2y+k^2-2=(x+k/2)^2+(y-1)^2-3+\frac{3}{4}k^2$: il s'agit de l'équation du cercle de centre $(-k/2,1)$ et rayon $\sqrt{3-\frac{3}{4}k^2}$, d'où la condition $3-\frac{3}{4}k^2>0$, *i.e.* $k\in]-2,2[$.

Exercice 1.22 (Paraboles)

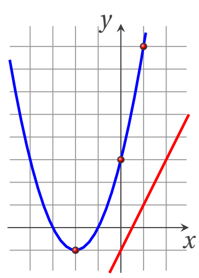
1. Calculer les intersections de la droite d'équation $y=x+2$ avec la parabole d'équation $y=3x^2-5x+2$.
2. Calculer les intersections de la droite d'équation $y=2x-1$ avec la parabole passant par les points $(0,3)$, $(1,8)$ et $(-2,-1)$.

Correction

1. Les intersections de la droite d'équation $y=x+2$ avec la parabole d'équation $y=3x^2-5x+2$ sont $(0,2)$ et $(2,4)$. Le sommet se trouve en $\left(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)=\left(\frac{5}{6},-\frac{1}{12}\right)$.



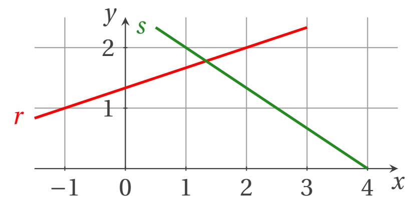
2. Aucune intersection entre la parabole d'équation $y=(x+1)(x+3)=x^2+4x+3$ et la droite d'équation $y=2x-1$.



Systèmes linéaires

Exercice 1.23

Trouver l'équation des droites r et s représentées ci-dessous et calculer les coordonnées du point d'intersection :



Correction

$$r : y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}, \qquad\qquad s : y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}.$$

Le point d'intersection a coordonnées (x, y) qui vérifient

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}, \\ y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}, \end{cases} \iff \begin{cases} y - \frac{1}{3}x = \frac{4}{3}, \\ y + \frac{2}{3}x = \frac{8}{3}, \end{cases} \iff \begin{cases} 3y - x = 4, \\ 3y + 2x = 8, \end{cases} \iff \begin{cases} 3y - x = 4, \\ 3x = 4, \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{4}{3}, \\ y = \frac{16}{9}. \end{cases}$$

Exercice 1.24

Résoudre les systèmes linéaires suivantes par la méthode de Gauss

$$(1)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -6, \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 = 12, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -8, \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 = 15. \end{cases} \qquad (3)\ \begin{cases} -2u - 4v + 3w = -1 \\ 2v - w = 1 \\ u + v - 3w = -6 \end{cases}$$

Correction

Système (1)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -6, \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ -4x_2 - 2x_3 = -8, \\ 2x_2 + 5x_3 = 1. \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2/2} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ -4x_2 - 2x_3 = -8, \\ 4x_3 = -3. \end{cases}$$

donc $x_3 = -\frac{3}{4}$, $x_2 = \frac{19}{8}$ et $x_1 = -\frac{7}{2}$.

Système (2)

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 = 12 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -8 \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 = 15 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1} \begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 = 12 \\ x_2 + 8x_3 = 16 \\ 5x_2 + 8x_3 = 63 \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2} \begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 = 12 \\ x_2 + 8x_3 = 16 \\ -32x_3 = -17 \end{cases}$$

donc $x_3 = \frac{17}{32}$, $x_2 = \frac{47}{4}$ et $x_1 = \frac{43}{32}$.

Système (3)

$$\begin{cases} -2u - 4v + 3w = -1 \\ 2v - w = 1 \\ u + v - 3w = -6 \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_1/2} \begin{cases} -2u - 4v + 3w = -1 \\ 2v - w = 1 \\ -v - \frac{3}{2}w = -{}^{13}/_{2} \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2/2} \begin{cases} -2u - 4v + 3w = -1 \\ 2v - w = 1 \\ -2w = -6 \end{cases}$$

donc $w = 3$, $v = 2$ et $u = 1$.

Exercice 1.25

Trouver toutes les solutions des systèmes linéaires homogènes suivantes

$$(1)\ \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ -2x_1 + 2x_3 = 0, \\ -11x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases} \qquad (3)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Correction
Système (1)

$$\begin{cases} -3x_1+x_2+2x_3=0,\\ -2x_1+2x_3=0,\\ -11x_1+6x_2+5x_3=0.\end{cases} \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-\frac{11}{3}L_1]{L_2\leftarrow L_2-\frac{2}{3}L_1} \begin{cases} -3x_1 +x_2 +2x_3=0,\\ -{}^2/_3x_2+{}^2/_3x_3=0,\\ {}^7/_3x_2-{}^7/_3x_3=0,\end{cases} \xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+\frac{7}{2}L_2} \begin{cases} -3x_1 +x_2 +2x_3=0,\\ -{}^2/_3x_2+{}^2/_3x_3=0,\\ 0=0,\end{cases}$$

Le système admet une infinité de solutions de la forme (κ,κ,κ) avec $\kappa\in\mathbb{R}$.

Système (2)

$$\begin{cases} x_1+x_2+3x_3+x_4=0,\\ x_1+3x_2+2x_3+4x_4=0,\\ 2x_1+x_3-x_4=0.\end{cases} \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-2L_1]{L_2\leftarrow L_2-L_1} \begin{cases} x_1 +x_2+3x_3=1,\\ 2x_2 -x_3=3,\\ -2x_2-5x_3=-3,\end{cases} \xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+L_2} \begin{cases} x_1+x_2+3x_3=1,\\ 2x_2 -x_3=3,\\ -6x_3=0,\end{cases}$$

Le système admet une infinité de solutions de la forme $(\frac{1}{2}\kappa,-\frac{3}{2}\kappa,0,\kappa)$ avec $\kappa\in\mathbb{R}$.

Système (3)

$$\begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3=0,\\ -x_1+2x_3=0,\\ 2x_1-3x_2-x_3=0.\end{cases} \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-L_1]{L_2\leftarrow L_2+\frac{L_1}{2}} \begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3=0,\\ -{}^1/_2x_2+{}^1/_2x_3=0,\\ -2x_2+2x_3=0,\end{cases} \xrightarrow{L_3\leftarrow L_3-4L_2} \begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3=0,\\ -{}^1/_2x_2+{}^1/_2x_3=0,\\ 0=0,\end{cases}$$

Le système admet une infinité de solutions de la forme $(2\kappa,\kappa,\kappa)$, $\kappa\in\mathbb{R}$.

Exercice 1.26 (V. GUIRARDEL)

Vous projetez de passer un concours de recrutement l'an prochain. Vous avez sous les yeux le tableau de notes suivant :

CANDIDAT	Mathématique	Anglais	Informatique	Moyenne
QUI	7	12	6	8
QUO	11	6	10	9
QUA	11	16	14	14

Retrouver les coefficients de chaque épreuve. La solution est-elle unique?

Correction
Il s'agit de trouver les trois coefficients $m,a,i\in[0;1]$ tels que

$$\begin{cases} 7m+12a+6i=8,\\ 11m+6a+10i=9,\\ 11m+16a+14i=14.\end{cases}$$

Utilisons la méthode de GAUSS :

$$\begin{cases} 7m+12a +6i=8,\\ 11m +6a+10i=9,\\ 11m+16a+14i=14,\end{cases} \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-\frac{11}{7}L_1]{L_2\leftarrow L_2-\frac{11}{7}L_1} \begin{cases} 7m+12a +6i=8,\\ -\frac{90}{7}a +\frac{4}{7}i=-\frac{25}{7},\\ -\frac{20}{7}a+\frac{32}{7}i=\frac{10}{7},\end{cases} \xrightarrow{L_3\leftarrow L_3-\frac{2}{9}L_2} \begin{cases} 7m+12a+6i=8,\\ -\frac{90}{7}a+\frac{4}{7}i=-\frac{25}{7},\\ \frac{40}{9}i=\frac{20}{9},\end{cases}$$

qui admet l'unique solution $(0.2,0.3,0.5)$.

Une autre interprétation est la suivante : il s'agit de trouver les trois coefficients $m,a,i\in[0;1]$ tels que

$$\begin{cases} 7m+12a+6i=8(m+a+i)\\ 11m+6a+10i=9(m+a+i),\\ 11m+16a+14i=14(m+a+i).\end{cases}$$

Utilisons la méthode de GAUSS :

$$\begin{cases} -m+4a-2i=0,\\ 2m-3a +i=0,\\ -3m+2a =0,\end{cases} \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-\frac{11}{7}L_1]{L_2\leftarrow L_2-\frac{11}{7}L_1} \begin{cases} -m +4a-2i=0,\\ 5a-3i=0,\\ -10a+6i=0,\end{cases} \xrightarrow{L_3\leftarrow L_3-\frac{2}{9}L_2} \begin{cases} -m+4a-2i=0,\\ 5a-3i=0,\\ 0=0,\end{cases}$$

qui admet une infinité de solutions de la forme $(2\kappa,3\kappa,5\kappa)$ avec $\kappa\in[0;1/5]$.

Exercice 1.27

Soit le système linéaire

$$(S)\quad \begin{cases} x-\alpha y=1,\\ \alpha x-y=1.\end{cases}$$

Déterminer les valeurs de α de telle sorte que ce système possède :

1. une infinité de solutions;
2. aucune solution;
3. une solution unique.

Correction

$$\begin{cases} x-\alpha y=1\\ \alpha x\ -y=1\end{cases} \xrightarrow{L_2\leftarrow L_2-\alpha L_1} \begin{cases} x\quad -\alpha y=1\\ (-1+\alpha^2)y=1-\alpha\end{cases}$$

Comme $-1+\alpha^2=(\alpha-1)(\alpha+1)$ on conclut que

1. si $\alpha=1$ (*i.e.* la dernière équation correspond à $0=0$) alors (S) possède une infinité de solutions,
2. si $\alpha=-1$ (*i.e.* la dernière équation correspond à $0=2$) alors (S) ne possède aucune solution,
3. si $\alpha\not\in\{-1;1\}$ alors (S) possède une solution unique $x=\frac{1}{\alpha+1}$ et $y=-\frac{1}{\alpha+1}$.

Exercice 1.28

Soit le système linéaire

$$(S)\quad \begin{cases} x+y-z=1,\\ 2x+3y+\beta z=3,\\ x+\beta y+3z=-3.\end{cases}$$

Déterminer les valeurs de β de telle sorte que ce système possède :

1. une infinité de solutions;
2. aucune solution;
3. une solution unique.

Correction

$$\begin{cases} x_1\ +x_2\ -x_3\ =1\\ 2x_1+3x_2+\beta x_3\ =3\\ x_1+\beta x_2+3x_3=-3\end{cases} \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-L_1]{L_2\leftarrow L_2-2L_1} \begin{cases} x_1\quad +x_2\quad -x_3\ =1\\ x_2+(\beta+2)x_3\ =1\\ (\beta-1)x_2\quad +4x_3=-4\end{cases} \xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+(1-\beta)L_2} \begin{cases} x_1+x_2\quad -x_3\quad =1\\ x_2\quad +(\beta+2)x_3\quad =1\\ (6-\beta-\beta^2)x_3=-(3+\beta)\end{cases}$$

Comme $6-\beta-\beta^2=(2-\beta)(3+\beta)$ on conclut que

1. si $\beta=-3$ (*i.e.* la dernière équation correspond à $0z=0$) alors (S) possède une infinité de solutions,
2. si $\beta=2$ (*i.e.* la dernière équation correspond à $0z=-5$) alors (S) ne possède aucune solution,
3. si $\beta\not\in\{2;-3\}$ alors (S) possède une solution unique.

Exercice 1.29 (Résolution de systèmes non carrés)

Résoudre le système

$$(S)\quad \begin{cases} -2x+y+z=0,\\ x-2y+z=0,\end{cases}$$

d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

Correction

(S) est équivalent au système

$$\begin{cases} -2x+y+z=0,\\ -3y+3z=0,\end{cases}$$

qui admet une infinité de solutions de la forme (κ,κ,κ) pour $\kappa\in\mathbb{R}$.

Exercice 1.30 (Résolution de systèmes non carrés)

Résoudre le système

$$(S)\quad\begin{cases} x+2y+z=-1,\\ 2x+y-z=1,\\ -x+y+2z=-2,\\ x+y+z=4,\end{cases}$$

d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

Correction

(S) étant un système de 4 équations à 3 inconnues, on considère (S') le sous-système carré d'ordre 3 qu'on peut résoudre par la méthode du pivot de Gauss

$$(S')\quad\begin{cases} x+2y+z=-1,\\ 2x+y-z=1,\\ -x+y+2z=-2,\end{cases}\xrightarrow[L_3\leftarrow L_3+L_1]{L_2\leftarrow L_2-2L_1}\begin{cases} x+2y+z=-1,\\ -3y-3z=3,\\ 3y+3z=-3,\end{cases}\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+L_2}\begin{cases} x+2y+z=-1,\\ -3y-3z=3,\\ 0=0,\end{cases}$$

qui admet une infinité de solutions de la forme $(1+\kappa,-1-\kappa,\kappa)$ pour $\kappa\in\mathbb{R}$. Cherchons parmi ces solutions celles qui vérifient l'équation de (S) qui n'apparaît pas dans (S') : pour $(x,y,z)=(1+\kappa,-1-\kappa,\kappa)$ on a $x+y+z=1+\kappa-1-\kappa+\kappa=\kappa$ donc $x+y+z=4$ si et seulement si $\kappa=4$ ainsi (S) admet l'unique solution $(5,-5,4)$.

Problèmes

Exercice 1.31

Un parpaing pèse un kilo plus un demi parpaing. Combien pèse un parpaing ?

Correction

Soit p le poids (en kilo) d'un parpaing. On a alors $p=1+\frac{p}{2}$, ce qui donne $p=2$.
Si on ne veut pas utiliser les équations, considérons une balance à deux plateaux ; si on pose un parpaing sur le plateau de gauche et sur le plateau de droite un kilo et la moitié d'un parpaing, on est à l'équilibre. Maintenant, si on enlève des deux plateaux la moitié d'un parpaing, on est toujours à l'équilibre : sur le plateau de gauche il reste la moitié d'un parpaing et sur ceux de droite 1 kilo. On conclut que la moitié d'un parpaing pèse 1 kilo et donc qu'un parpaing pèse 2 kilo.

Exercice 1.32 (Paul Halmos, "*Problème pour mathématiciens, petits et grands*")

On suppose que les concombres sont composés de $a\%$ d'eau à la cueillette. On laisse reposer M kilogrammes de concombre pendant une nuit et le lendemain, à cause de la chaleur et de l'évaporation, les concombres ne contient plus que $b\%$ d'eau avec $0<b<a<100$. Quel est le nouveau poids de ce stock de concombres ?
Considérer par exemple $M=500$, $a=99$ et $b=98$.

Correction

Avant la nuit, les concombres étaient composés de $M\times(100\%-a\%)$ kilogrammes de matière solide. La matière solide n'a pas changée pendant la nuit et le lendemain elle constitue le $(100\%-b\%)$ du poids restant, *i.e.*

$$\frac{M\times(100\%-a\%)\text{kg}}{(100\%-b\%)}=\frac{x\text{kg}}{100\%}\qquad\text{ainsi}\quad x=\frac{M(100-a)}{100-b}\text{kg}.$$

Avec $M=500$, $a=99$ et $b=98$ on trouve $x=250\,\text{kg}$.

Exercice 1.33

Un comité de 70 personnes élit son président. Deux candidats se sont présentés. Si le premier a obtenu 60% des votes et le deuxième deux fois moins, combien d'électeurs se sont abstenus ?

Correction

Le premier candidat a obtenu 60% de votes, le deuxième 30%, ainsi $100\%-60\%-30\%=10\%$ d'électeurs se sont abstenus, c'est-à-dire $71\times10\%=7$ personnes.

Exercice 1.34

La population de l'Allemagne diminue chaque année de 0.3%. Si à la fin de l'année 2007 la population était de 82 200 000, quelle était la population de l'Allemagne à la fin de l'année 2009 ?

Correction

$82\,200\,000 \times (1-0.3\%)^2 = 81\,707\,540$.

Exercice 1.35

Un prix vient d'augmenter de 25%. De quel pourcentage faut-il le baisser pour revenir au prix initial ?

Correction

Augmenter le prix de 25% revient à le multiplier par 1.25 ou encore par 5/4. Donc, pour revenir au prix initial on le multiplie par 4/5 ou encore par 0.8 ; autrement dit, on fait une baisse de 20%.

Exercice 1.36

Un prix subit deux augmentations successives, d'abord de 20%, puis de 50%. Quel est le pourcentage de l'augmentation globale ? L'augmentation globale serait-elle la même si le prix avait d'abord augmenté de 50%, puis de 20% ?

Correction

$(1+20\%)\times(1+50\%) = 1.2\times 1.5 = 1.8 = 1+80\%$: l'augmentation globale est de 80%, indépendamment de l'ordre dans laquelle les deux augmentations ont été faites.

Exercice 1.37

Dans quelle proportion faut-il mélanger une solution à 40% d'un certain produit avec une solution à 90% du même produit pour obtenir une solution à 60% ?

Correction

Si on appelle p la proportion de la solution à 40%, alors la proportion de la solution à 90% est $(1-p)$. Dans un tel mélange, le total des deux fractions (proportions) est évidemment 1 car $(p+(1-p)=1)$. La proportion de produit pur dans le mélange est : $0,4p+0,9(1-p)=0,9-0,5p$. Mais c'est aussi 60% soit 0,60 donc on obtient $0,6=0,9-0,5p$, d'où $p=0,3/0,5=3/5=0,6$ soit 60%. Il faut donc mélanger 6 volumes de solution à 40% avec 4 volumes de solution à 90% pour obtenir 10 volumes de solution à 60%.

Exercice 1.38

Dans un panier de fruits, 1/7 de tous les fruits sont des ananas, 3/8 des pamplemousses et 2/5 des nectarines. Si les 23 fruits restantes sont des pommes, combien d'ananas y a-t-il dans le panier ?

Correction

Soit F le nombre total de fruits, A le nombre d'ananas, P le nombre de pamplemousses et N le nombre de nectarines. Alors

$$\begin{cases} A=\frac{1}{7}F, \\ P=\frac{3}{8}F, \\ N=\frac{2}{5}F, \\ 23=F-A-P-N, \end{cases}$$

ainsi $F=280$ donc $A=40$.

Exercice 1.39

Une feuille de papier d'une épaisseur d'un dixième de millimètre est pliée 15 fois en deux : quelle est l'épaisseur du résultat après pliage ? Après combien de pliages l'épaisseur dépasse-t-elle la distance Terre-Lune (la distance Terre-Lune vaut approximativement 300 000 km) ?

Correction

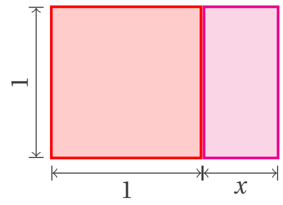
Épaisseur du résultat après pliage : $2^{15}\times 0.1\,\text{mm} = 3.2768\,\text{m}$. L'épaisseur dépasse la distance Terre-Lune après n pliage avec n qui vérifie $2^n \ge 3\times 10^{12}$, *i.e.* 42 pliages.

Exercice 1.40 (L'architecte — MathC2+)

Un architecte a dessiné les plans d'un bâtiment rectangulaire destiné aux mathématiciens toulonnais. Ils ont demandé à l'architecte à ce que le bâtiment respecte la condition suivante : si on lui retire le plus grand carré à l'une de ses extrémités (soit un carré de côté la largeur du bâtiment), le rectangle restant a exactement les mêmes proportions que le bâtiment entier. La condition fixée par les mathématiciens est-elle réalisable ?

Correction

$$\frac{1+x}{1} = \frac{1}{x} \quad \iff \quad x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$



2

Éléments de logique et notions fondamentales de la théorie des ensembles

Logique

Exercice 2.1

Écrire les tables de vérité suivantes :

a) "non(P) et Q"

b) "non(P et Q)"

c) "(non(P)) ou (non(Q))"

d) "$P \implies Q$" (*i.e.* "(non(P)) ou Q")

Correction

P	Q	non(P)	non(Q)	P et Q	(non(P)) et Q	non(P et Q)	(non(P)) ou (non(Q))	(non(P)) ou Q
V	V	F	F	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V	V	V	V
F	F	V	V	F	F	V	V	V

On remarque l'équivalence logique

$$\text{“non}(P \text{ et } Q)\text{”} \qquad \equiv \qquad \text{“(non}(P)) \text{ ou } (\text{non}(Q))\text{”}$$

Exercice 2.2

Pour chaque proposition, écrire la contraposée, la négation et la réciproque, et dire si elle est vraie ou fausse (on justifie succinctement) :

1. $x > 3 \implies x > 2$
2. $x > 2 \implies x > 3$
3. $x = 3 \implies x^2 = 9$
4. $x^2 = 9 \implies x = -3$

Correction

1. $x > 3 \implies x > 2$

   Proposition $x \leq 3$ ou $x > 2$

   Contraposée $x \leq 2 \implies x \leq 3$

   Négation $x > 3$ et $x \leq 2$

   Réciproque $x > 2 \implies x > 3$

   proposition vraie

2. $x > 2 \implies x > 3$

   Proposition $x \leq 2$ ou $x > 3$

   Contraposée $x \leq 3 \implies x \leq 2$

   Négation $x > 2$ et $x \leq 3$

   Réciproque $x > 3 \implies x > 2$

   proposition fausse pour x dans $]2,3]$ (c'est la négation).

3. $x = 3 \implies x^2 = 9$

Proposition $x \neq 3$ ou $x^2 = 9$
Contraposée $x^2 \neq 9 \implies x \neq 3$
Négation $x = 3$ et $x^2 \neq 9$
Réciproque $x^2 = 9 \implies x = 3$
proposition vraie

4. $x^2 = 9 \implies x = -3$
   Proposition $x \neq 9$ ou $x = -3$
   Contraposée $x \neq -3 \implies x^2 \neq 9$
   Négation $x^2 = 9$ et $x \neq -3$
   Réciproque $x = -3 \implies x^2 = 9$
   proposition fausse ($x = 3$ est aussi solution)

Exercice 2.3

Parmi les propositions suivantes, indiquer si elles sont vraies ou fausses :

1. $(2 < 3)$ et (2 divise 4)
2. $(2 < 3)$ et (2 divise 5)
3. $(2 < 3)$ ou (2 divise 5)
4. $(2 < 3)$ et $\neg$(2 divise 5)
5. $\neg(2 < 3)$ ou (2 divise 5)

Correction

1. Il s'agit de la proposition $P \wedge Q$ où
   - $\star$ $P =$"$2 < 3$"
   - $\star$ $Q =$"2 divise 4"

   Puisque P et Q sont vraies, la proposition est vraie.
2. Il s'agit de la proposition $P \wedge Q$ où
   - $\star$ $P =$"$2 < 3$"
   - $\star$ $Q =$"2 divise 5"

   Puisque Q est fausse, la proposition est fausse.
3. Il s'agit de la proposition $P \vee Q$ où
   - $\star$ $P =$"$2 < 3$"
   - $\star$ $Q =$"2 divise 5"

   Puisque P est vraie, la proposition est vraie.
4. Il s'agit de la proposition $P \wedge Q$ où
   - $\star$ $P =$"$2 < 3$"
   - $\star$ $Q =$"$\neg$(2 divise 5)"

   Puisque P et Q sont vraies, la proposition est vraie.
5. Il s'agit de la proposition $P \vee Q$ où
   - $\star$ $P =$"$\neg(2 < 3)$"
   - $\star$ $Q =$"(2 divise 5)"

   Puisque P et Q sont fausses, la proposition est fausse.

Exercice 2.4

Soient les propositions définies par $P(x) =$"$x \leq 1$" et $Q(x) =$"$x \geq 2$". Donner les valeurs de x dans $\mathbb{R}$ pour lesquelles

1. "$P \wedge Q$" est vraie
2. "non$(P) \wedge Q$" est fausse
3. "$P \vee Q$" est vraie
4. "non$(P) \vee Q$" est fausse

Correction

1. Pour aucune valeur de x dans $\mathbb{R}$
2. $x \in]-\infty, 2[$

3. $x \in]-\infty; 1] \cup [2; +\infty[$
4. $x \in]-\infty, 1[$

Exercice 2.5

1. "4 divise n" est-elle une condition nécessaire, suffisante, nécessaire et suffisante pour que "2 divise n" ?
2. "3 divise n" est-elle une condition nécessaire, suffisante, nécessaire et suffisante pour que "9 divise n" ?

Correction

1. "4 divise n" est une condition suffisante pour que "2 divise n". En effet, si on note P l'assertion "4 divise n" et Q l'assertion "2 divise n", on a que
   - ⋆ l'énonce "$P \implies Q$" est vrai car si 4 divise n alors il existe p dans $\mathbb{N}$ tel que $n = 4p = 2(2p)$ ce qui signifie que 2 divise n ;
   - ⋆ l'énonce "$Q \implies P$" est faux car pour $n = 2$ on a bien que 2 divise n mais 4 ne divise pas n.
2. "3 divise n" est une condition nécessaire pour que "9 divise n". En effet, si on note P l'assertion "3 divise n" et Q l'assertion "9 divise n", on a que
   - ⋆ l'énonce "$P \implies Q$" est faux car pour $n = 6$ on a bien que 3 divise n mais 9 ne divise pas n ;
   - ⋆ l'énonce "$Q \implies P$" est vrai car si 9 divise n alors il existe q dans $\mathbb{N}$ tel que $n = 9q = 3(3q)$ ce qui signifie que 3 divise n.

Exercice 2.6

On considère la proposition $\mathscr{I}$ suivante :

$\mathscr{I}$ = "Si l'entier naturel n se termine par 5, alors il est divisible par 5."

1. Écrire la contraposée de la proposition $\mathscr{I}$.
2. Écrire la négation de la proposition $\mathscr{I}$.
3. Écrire la réciproque de la proposition $\mathscr{I}$.

Correction

Rappels :

- ⋆ La proposition $\mathscr{I}$ correspond a l'implication "$P \implies Q$" avec P ="l'entier naturel n se termine par 5" et Q ="l'entier naturel n est divisible par 5". Elle est logiquement équivalent à la proposition "$(\neg P) \vee Q$".
- ⋆ La contraposée, qui a la même véridicité que "$P \implies Q$", s'écrit "$(\neg Q) \implies (\neg P)$".
- ⋆ La négation, qui est fausse si "$P \implies Q$" est vraie et qui est vraie si "$P \implies Q$" est fausse, s'écrit "$\neg[(\neg P) \vee Q]$", ce qui est équivalent à écrire "$P \wedge (\neg Q)$".
- ⋆ La réciproque s'écrit "$Q \implies P$".

Dans notre cas on a :

Implication : "Si l'entier naturel n se termine par 5, alors il est divisible par 5."

Prouvons que cette implication est vraie :

$$\begin{aligned} P \text{ vraie} &\implies \exists m \in \mathbb{N} \mid n = 10m + 5 \\ &\implies \exists m \in \mathbb{N} \mid n = 5(2m+1) \\ &\implies Q \text{ vraie} \end{aligned}$$

Contraposée : "Si l'entier naturel n n'est pas divisible par 5 alors il ne se termine pas par 5."

Elle est vraie car elle a la même véridicité que l'implication "$P \implies Q$".

Négation : "L'entier naturel n se termine par 5 et n'est pas divisible par 5."

Elle est fausse car l'implication "$P \implies Q$" est vraie.

Réciproque : "Si l'entier naturel n est divisible par 5, alors il se termine par 5."

Cette proposition est fausse : l'entier naturel 10 ne se termine pas par 5 mais est divisible par 5.

Exercice 2.7

Sur le portail d'une maison il y a une pancarte : «Chien qui aboie, ne mord pas. Notre chien n'aboie pas.». Franchiriez-vous cette porte ?

Correction

Soit P ="Aboyer" et Q ="Ne pas mordre". On a $P \implies Q$, ce qui équivaut à $\neg Q \implies \neg P$: «Chien qui mord, n'aboie pas.» «Notre chien n'aboie pas» correspond à $\neg P$, ce qui n'implique rien sur la véracité de Q : il n'est pas possible d'établir si le chien mord ou pas.

Exercice 2.8 (Th. Champion)

On considère les propositions suivantes

1. "les éléphants portent toujours des pantalons courts";
2. "si un animal mange du miel alors il peut jouer de la cornemuse";
3. "si un animal est facile à avaler alors il mange du miel";
4. "si un animal porte des pantalons courts alors il ne peut pas jouer de la cornemuse".

On suppose que ces propositions sont vraies. Quelqu'un prétend en déduire que les éléphants sont faciles à avaler. Cette conclusion est-elle correcte?

Correction

Soit $A =$"Porter des pantalons courts", $B =$"Manger du miel", $C =$"Pouvoir jouer de la cornemuse", $D =$"Être facile à avaler". Les propositions données se formalisent comme suit :

1. $\forall$ éléphants, C;
2. $B \implies C$ (logiquement équivalente à $\neg C \implies \neg B$);
3. $D \implies B$ (logiquement équivalente à $\neg B \implies \neg D$);
4. $A \implies \neg C$;

et on veut savoir si c'est vraie que "$\forall$ éléphants, D".
Les quatre propositions étant vraies, on a la chaîne d'implications $A \implies \neg C \implies \neg B \implies \neg D$, c'est-à-dire "Si un animal porte des pantalons courts alors il n'est pas facile à avaler". Étant donné que les éléphants portent toujours des pantalons courts, cela signifie "$\forall$ éléphants, $\neg D$" : la déduction est fausse.

Exercice 2.9 (Th. Champion)

On peut déduire de la loi des gaz parfaits le principe suivant :

> "Si le volume du gaz est constant, alors la température du gaz est une fonction croissante de la pression."

1. Écrire la contraposée et la négation du principe ci-dessus.
2. On étudie un gaz qui a la propriété suivante : "quand son volume est constant et sa température augmente, sa pression diminue." Peut-on dire si c'est un gaz parfait ou non?

Correction

Soit $P =$"le volume du gaz est constant" et $Q =$"la température du gaz est une fonction croissante de la pression".

1. La contraposée de «$P \implies Q$» est «$(\neg Q) \implies (\neg P)$». On obtient donc comme contraposée :

   > "Si la température du gaz n'est pas une fonction croissante de la pression alors le volume du gaz n'est pas constant."

   Remarque : cette contraposée est logiquement équivalente au principe donné dans l'énoncé.
   La négation de «$P \implies Q$», *i.e.* de «$(\neg P) \vee Q$», est «$P \wedge (\neg Q)$». On obtient donc comme négation :

   > "Le volume du gaz est constant et la température du gaz n'est pas une fonction croissante de la pression."

   Remarque : cette négation est vraie lorsque la proposition initiale est fausse et elle est fausse lorsque la proposition initiale est vraie.
2. Cette proposition correspond à «$P \wedge (\neg Q)$» donc on peut déduire qu'il n'est pas un gaz parfait.

Exercice 2.10

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{R}$. Écrire avec les quantificateurs les propriétés suivantes :

1. f prend toujours la valeur 1
2. f prend au moins une fois la valeur 1
3. f prend exactement une fois la valeur 1
4. f prend ses valeurs entre -2 et 3
5. f ne prend que des valeurs entiers
6. f s'annule au moins une fois sur l'intervalle $[-1,1[$

Correction

1. $f(x) = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$

2. $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 1$
3. $\exists! x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 1$
4. $f(x) \in [-2,3]\ \forall x \in \mathbb{R}$
5. $f(x) \in \mathbb{Z}\ \forall x \in \mathbb{R}$
6. $\exists x \in [-1,1[$ tel que $f(x) = 0$

Exercice 2.11

Pour chaque énoncé, écrire la négation, puis dire si l'énoncé original est vrai ou faux (en justifiant la réponse à l'aide d'une démonstration).

a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 1$

b) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N},\ p > n$

c) $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$

d) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$

e) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$

Correction

1. $P =$ "$\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 1$"
   $\neg P =$ "$\exists x \in \mathbb{R} \quad x \leq 1$"
   P est faux. Pour cela on prouve que $\neg P$ est vrai : en effet $x = 0$ est un réel inférieur à 1.
2. $P =$ "$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad p > n$"
   $\neg P =$ "$\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad p \leq n$"
   P est vrai : étant donné $n \in \mathbb{N}$, il existe toujours un $p \in \mathbb{N}$ tel que $p > n$ car il suffit de prendre $p = n + 1$.
3. $P =$ "$\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$"
   $\neg P =$ "$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y \leq 0$"
   P est faux. Pour cela on prouve que $\neg P$ est vrai : étant donné $x \in \mathbb{R}$, il existe toujours un $y \in \mathbb{R}$ tel que $x + y \leq 0$ car il suffit de prendre $y = -(x+1)$ qui donne $x + y = -1 \leq 0$.
4. $P =$ "$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$"
   $\neg P =$ "$\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y \leq 0$"
   P est vrai : étant donné $x \in \mathbb{R}$, il existe toujours un $y \in \mathbb{R}$ tel que $x + y > 0$ car il suffit de prendre $y = -x + 1$ qui donne $x + y = 1 > 0$.
5. $P =$ "$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$"
   $\neg P =$ "$\exists x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y \leq 0$"
   P est faux. Pour cela on prouve que $\neg P$ est vrai : $x = -1$ et $y = 0$
6. $P =$ "$\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 > x$"
   $\neg P =$ "$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad y^2 \leq x$"
   P est vrai : il suffit de choisir $x < 0$.

Exercice 2.12

On considère $x, y, z \in \mathbb{N}$. Soit la proposition

$$(P) \qquad \text{«si } (x=3) \text{ alors } (y=5 \text{ et } z=1)\text{».}$$

Pour chaque affirmation dire si elle est vraie ou fausse :

a) (P) est équivalente à «si $y = 5$ et $z = 1$ alors $x = 3$».

b) (P) est équivalente à «pour que $y = 5$ et $z = 1$ il suffit que $x = 3$».

c) (P) est équivalente à «pour que $y = 5$ et $z = 1$ il faut que $x = 3$».

d) La négation de (P) est «$x = 3$, alors $y \neq 5$ ou $z \neq 1$».

e) La négation de (P) est «si $x = 3$, alors $y \neq 5$ ou $z \neq 1$».

Correction

a) Fausse

b) Vraie

c) Fausse

d) Fausse

e) Fausse

Récurrence

Exercice 2.13

Démontrer (par récurrence) les propositions

1) $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad \sum_{i=1}^{n} i=\dfrac{n(n+1)}{2}$,

2) $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad \sum_{i=1}^{n}(2i+1)=n(n+2)$,

3) $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad \sum_{i=1}^{n} i^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

4) $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad \sum_{i=1}^{n} i^3=\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$,

5) $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad \sum_{i=1}^{n} i^4=\dfrac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$,

Correction

On considère une propriété P_n qui dépend d'un entier naturel n et on souhaite démontrer par récurrence qu'elle est vraie pour tout n à partir d'un certain rang n_0. Pour cela il faut

1. montrer que la propriété P_n est vraie pour un entier particulier n_0 (par exemple 0 ou 1) ;
2. montrer que si elle est vraie pour un certain n, cela implique qu'elle est vraie pour son successeur $n+1$.

1) Pour $n=1$ la somme se réduit à 1 et elle est égale à $1\frac{2}{2}=1$. On suppose maintenant que le résultat est vrai pour un certain n, c'est-à-dire que $\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$. Alors $\sum_{i=1}^{n+1} i=\sum_{i=1}^{n} i+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Le résultat est donc vrai pour l'entier $n+1$.

2) Pour $n=1$ la somme se réduit à $2\times1+1$ et elle est égale à $1(1+2)=2$. On suppose maintenant que le résultat est vrai pour un certain n, c'est-à-dire que $\sum_{i=1}^{n}(2i+1)=n(n+2)$. Alors $\sum_{i=1}^{n+1}(2i+1)=\sum_{i=1}^{n}(2i+1)+(2(n+1)+1)=n(n+2)+(2(n+1)+1)=(n+1)(n+3)$. Le résultat est donc vrai pour l'entier $n+1$.

3) Pour $n=1$ la somme des carrées se réduit à 1^2 et elle est égale à $\frac{1(1+1)(2+1)}{6}=1$. On suppose maintenant que le résultat est vrai pour un certain n, c'est-à-dire que $\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Alors $\sum_{i=1}^{n+1} i^2=\sum_{i=1}^{n} i^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$. Le résultat est donc vrai pour l'entier $n+1$.

4) Pour $n=1$ la somme des cubes se réduit à 1^3 et elle est égale à $\frac{(1\times2)^2}{4}=1$. On suppose maintenant que le résultat est vrai pour un certain n, c'est-à-dire que $\sum_{i=1}^{n} i^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. Alors $\sum_{i=1}^{n+1} i^3=\sum_{i=1}^{n} i^3+(n+1)^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$. Le résultat est donc vrai pour l'entier $n+1$.

5) Pour $n=1$ la somme se réduit à 1^4 et elle est égale à $\frac{1(1+1)(6+9+1-1)}{30}=1$. On suppose maintenant que le résultat est vrai pour un certain n, c'est-à-dire que $\sum_{i=1}^{n} i^4=\frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$. Alors $\sum_{i=1}^{n+1} i^4=\sum_{i=1}^{n} i^4+(n+1)^4=\frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}+(n+1)^4=\frac{(n+1)(n+2)(6(n+1)^3+9(n+1)^2+(n+1)-1)}{30}$. Le résultat est donc vrai pour l'entier $n+1$.

Ensembles

Exercice 2.14

Soient E un ensemble et F et G deux parties de E. Montrer que

1) $C_E(C_EF)=F$
2) $F\subset G \iff C_EF\supset C_EG$
3) $C_E(F\cup G)=(C_EF)\cap(C_EG)$ et $C_E(F\cap G)=(C_EF)\cup(C_EG)$ [Lois de Morgan]

Correction

1. $x\in C_E(C_EF)\iff x\notin C_EF\iff x\in F$
2. "$F\subset G$" $\iff$ "$(x\in F)\implies(x\in G)$" $\iff$ "non$(x\in G)\implies$ non$(x\in F)$" $\iff$ "$(x\in C_EG)\implies(x\in C_EF)$" $\iff$ "$C_EG\subset C_EF$"
3. $x\in C_E(F\cup G)\iff x\notin(F\cup G)\iff x\notin F$ ET $x\notin G\iff x\in C_E(F)$ ET $x\in C_E(G)\iff x\in(C_EF)\cap(C_EG)$
   $x\in C_E(F\cap G)\iff x\notin F$ OU $x\notin G\iff x\in C_E(F)$ OU $x\in C_E(G)\iff x\in(C_EF)\cup(C_EG)$

Exercice 2.15

Soit I un ensemble et $\{A\}_{i\in I}$ une partie de $\mathscr{P}(E)$. Montrer que

1. $C_E\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)=\bigcap_{i\in I}C_EA_i$

2. $C_E\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} C_E A_i$.

Correction
Soit I un ensemble et $\{A\}_{i\in I}$ une partie de $\mathscr{P}(E)$. Alors

1. $x \in C_E\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) \iff x \notin \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \iff \forall i \in \mathbb{N}^*\ x \notin A_i \iff \forall i \in \mathbb{N}^*\ x \in C_E(A_i) \iff x \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_E(A_i)$
2. $x \in C_E\left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) \iff x \notin \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \iff \exists i \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \notin A_i \iff \exists i \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in C_E(A_i) \iff x \in \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_E(A_i)$

Exercice 2.16
Expliciter les sous-ensembles suivants de la droite réelle

$$\bigcup_{x\in[0,1]} \left]\frac{x}{2}, 2x\right[\qquad \bigcap_{x\in[0,1]} \left]\frac{x}{2}, 2x\right[\qquad \bigcup_{x\in[0,1]} \left[\frac{x}{2}, 2x\right] \qquad \bigcap_{x\in[0,1]} \left[\frac{x}{2}, 2x\right]$$

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\right[\qquad \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[1+\frac{1}{n}, n\right] \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[3, 3+\frac{1}{n^2}\right[\qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-2-\frac{1}{n}, 4+n^2\right]$$

Correction

$$\bigcup_{x\in[0,1]} \left]\frac{x}{2}, 2x\right[=]0,2[\qquad \bigcap_{x\in[0,1]} \left]\frac{x}{2}, 2x\right[= \emptyset \qquad \bigcup_{x\in[0,1]} \left[\frac{x}{2}, 2x\right] = [0,2] \qquad \bigcap_{x\in[0,1]} \left[\frac{x}{2}, 2x\right] = \emptyset$$

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\right[= [0,2[\qquad \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[1+\frac{1}{n}, n\right] = [1,+\infty[\qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[3, 3+\frac{1}{n^2}\right[= \{3\} \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-2-\frac{1}{n}, 4+n^2\right] = [-2,5]$$

Avancé

Exercice 2.17
Soient les sous-ensembles de $\mathbb{R}$

$$A_i = \left[0, 1+\frac{1}{i}\right], \qquad B_i = \left[0, 1-\frac{1}{i}\right].$$

avec $i \in \mathbb{N}^*$. Trouver les ensembles

1. $C_{\mathbb{R}}(A_i)$,
2. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(A_i)$,
3. $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$,
4. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right)$,
5. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$,
6. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right)$,
7. $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(A_i)$;
8. $C_{\mathbb{R}}(B_i)$,
9. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(B_i)$,
10. $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i$,
11. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i\right)$,
12. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$,
13. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i\right)$,
14. $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(B_i)$;

Correction

1. $C_{\mathbb{R}}(A_i) = \mathbb{R} \setminus A_i =]-\infty, 0[\cup \left]1+\frac{1}{i}, +\infty\right[$,
2. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(A_i) =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$,
3. $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = [0,1]$,
4. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$,
5. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = [0,2]$,
6. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) =]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$,
7. $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(A_i) =]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$;
8. $C_{\mathbb{R}}(B_i) =]-\infty, 0[\cup \left]1-\frac{1}{i}, +\infty\right[$,
9. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(B_i) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
10. $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i = \{0\}$,
11. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
12. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i = [0,1[$,
13. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i\right) =]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[$,
14. $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(B_i) =]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[$;

3
Fonctions d'une variable réelle

Ensemble de définition

Exercice 3.1
Donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \qquad f_2\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \ln(e^x) \qquad f_3\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto e^{\ln(x)} \qquad f_4\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \frac{1-x}{1-x^2} \qquad f_5\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \sqrt{|x|} \qquad f_6\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \ln(|x|)$$

Correction

$$\mathscr{D}_{f_1}=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\, x\ge 0\ \wedge\ 1-x\ge 0\ \wedge\ \sqrt{1-x}\neq 0\right\}=[0;1[\qquad \mathscr{D}_{f_2}=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\, e^x>0\right\}=\mathbb{R} \text{ et on a } f_2(x)=x$$

$$\mathscr{D}_{f_3}=\{x\in\mathbb{R}\mid x>0\}=\mathbb{R}_+^* \text{ et on a } f_3(x)=x \qquad \mathscr{D}_{f_4}=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\, 1-x^2\neq 0\right\}=\mathbb{R}\setminus\{-1,+1\} \text{ et on a } f_4(x)=\frac{1}{1+x}$$

$$\mathscr{D}_{f_5}=\{x\in\mathbb{R}\mid |x|\ge 0\}=\mathbb{R} \qquad \mathscr{D}_{f_6}=\{x\in\mathbb{R}\mid |x|>0\}=\mathbb{R}^*$$

Exercice 3.2
Donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions f suivantes définies par la donnée du réel $f(x)$.

$$f_1(x)=e^x-x^2, \qquad f_2(x)=\frac{\ln(x)}{x^2+5x+7}, \qquad f_3(x)=\frac{e^x}{x^2+1},$$

$$f_4(x)=\sqrt{x^2+x+1}, \qquad f_5(x)=e^{2x}-(x+1)e^x, \qquad f_6(x)=\frac{\ln(x^2+2)}{2x},$$

$$f_7(x)=\frac{\sqrt{e^x+2}}{x}, \qquad f_8(x)=\frac{e^{3x}}{x^2+e^x}, \qquad f_9(x)=\ln(x)-x,$$

Correction

$$\mathscr{D}_{f_1}=\mathbb{R}, \qquad \mathscr{D}_{f_2}=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\, x>0\wedge x^2+5x+7\neq 0\right\}=\mathbb{R}_+^*, \qquad \mathscr{D}_{f_3}=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\, x^2+1\neq 0\right\}=\mathbb{R},$$

$$\mathscr{D}_{f_4}=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\, x^2+x+1\ge 0\right\}=\mathbb{R}, \qquad \mathscr{D}_{f_5}=\mathbb{R}, \qquad \mathscr{D}_{f_6}=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\, x^2+2>0\wedge x\neq 0\right\}=\mathbb{R}^*,$$

$$\mathscr{D}_{f_7}=\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq 0\}=\mathbb{R}^*, \qquad \mathscr{D}_{f_8}=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\, x^2+e^x\neq 0\right\}=\mathbb{R}, \qquad \mathscr{D}_{f_9}=\{x\in\mathbb{R}\mid x>0\}=\mathbb{R}_+^*,$$

Composée de fonctions

Exercice 3.3
On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u\colon x\mapsto 2x-8$ et $v\colon x\mapsto x^2$. Donner les ensembles de définition et les expressions des fonctions $u\circ v$ et $v\circ u$.

Correction

$$\begin{aligned}
\mathscr{D}_u&=\mathbb{R}, & u(\mathscr{D}_u)&=\mathbb{R},\\
\mathscr{D}_v&=\mathbb{R}, & v(\mathscr{D}_v)&=\mathbb{R}^+,\\
u(\mathscr{D}_u)\cap\mathscr{D}_v&=\mathbb{R}, & \mathscr{D}_{v\circ u}&=\{x\in\mathscr{D}_u\mid u(x)\in\mathscr{D}_v\}=\mathbb{R},\\
v(\mathscr{D}_v)\cap\mathscr{D}_u&=\mathbb{R}^+, & \mathscr{D}_{u\circ v}&=\{x\in\mathscr{D}_v\mid v(x)\in\mathscr{D}_u\}=\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Les deux fonctions composées sont donc définies sur $\mathbb{R}$ et on a $u\circ v\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $x\mapsto 2x^2-8$ et $v\circ u\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $x\mapsto(2x-8)^2$.

Exercice 3.4

Considérons les fonctions

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad x\mapsto \tfrac{1}{1-x} \qquad g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad x\mapsto \sqrt{x} \qquad h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad x\mapsto x^2$$

$$u\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad x\mapsto \tfrac{1}{1+x} \qquad v\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad x\mapsto \ln(x) \qquad w\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad x\mapsto e^x$$

Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes et écrire explicitement l'expression de la composition :

a) $f\circ g$ b) $g\circ f$ c) $h\circ g\circ f$ d) $u\circ v$ e) $v\circ u$ f) $w\circ v\circ u$

Correction

★ $f\circ g$, $g\circ f$, $h\circ g\circ f$;

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{1}{1-x}, & \mathcal{D}_f&=\mathbb{R}\setminus\{1\}, & f(\mathcal{D}_f)&=\mathbb{R}^*,\\ g(x)&=\sqrt{x}, & \mathcal{D}_g&=[0;+\infty[, & g(\mathcal{D}_g)&=[0;+\infty[,\\ h(x)&=x^2, & \mathcal{D}_h&=\mathbb{R}, & h(\mathcal{D}_h)&=[0;+\infty[,\end{aligned}$$

Donc

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\frac{1}{1-g(x)}=\frac{1}{1-\sqrt{x}}, \qquad \mathcal{D}_{f\circ g}=\left\{x\in\mathcal{D}_g \,\middle|\, g(x)\in\mathcal{D}_f\right\}=\left\{x\ge 0 \,\middle|\, g(x)\neq 1\right\}=\mathbb{R}_+\setminus 1,$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\sqrt{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{1-x}}, \qquad \mathcal{D}_{g\circ f}=\left\{x\in\mathcal{D}_f \,\middle|\, f(x)\in\mathcal{D}_g\right\}=\left\{x\neq 1 \,\middle|\, f(x)\ge 0\right\}=]-\infty;1[,$$

$$(h\circ g\circ f)(x)=h(g(f(x)))=\big(g(f(x))\big)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)^2=f(x), \quad \mathcal{D}_{h\circ g\circ f}=\left\{x\in\mathcal{D}_{g\circ f} \,\middle|\, g(f(x))\in\mathcal{D}_h\right\}=]-\infty;1[\neq\mathcal{D}_f.$$

★ $u\circ v$, $v\circ u$, $w\circ v\circ u$:

$$\begin{aligned} u(x)&=\frac{1}{1+x}, & \mathcal{D}_u&=\mathbb{R}\setminus\{-1\}, & u(\mathcal{D}_u)&=\mathbb{R}^*,\\ v(x)&=\ln(x), & \mathcal{D}_v&=]0;+\infty[, & v(\mathcal{D}_v)&=\mathbb{R},\\ w(x)&=e^x, & \mathcal{D}_w&=\mathbb{R}, & w(\mathcal{D}_w)&=]0;+\infty[,\end{aligned}$$

Donc

$$(v\circ u)(x)=v(u(x))=\ln(u(x))=\ln\left(\frac{1}{1+x}\right), \qquad \mathcal{D}_{v\circ u}=\{x\in\mathcal{D}_u \mid u(x)\in\mathcal{D}_v\}=\{x\neq -1 \mid u(x)>0\}=]-1;+\infty$$

$$(u\circ v)(x)=u(v(x))=\frac{1}{1+v(x)}=\frac{1}{1+\ln(x)}, \qquad \mathcal{D}_{u\circ v}=\{x\in\mathcal{D}_v \mid v(x)\in\mathcal{D}_u\}=\{x>0 \mid v(x)\neq -1\}=\mathbb{R}_+^*\setminus\{1/$$

$$(w\circ v\circ u)(x)=w(v(u(x)))=e^{v(u(x))}=e^{\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)}=\frac{1}{1+x}=u(x), \quad \mathcal{D}_{w\circ v\circ u}=\{x\in\mathcal{D}_{v\circ u} \mid v(u(x))\in\mathcal{D}_w\}=]-1;+\infty[\neq\mathcal{D}_u.$$

Exercice 3.5

Compléter le tableau suivant (dans cet exercice on ne s'intéresse pas aux domaines de définition mais exclusivement aux formules).

$f(x)$	$g(y)$	$g(f(x))$
$x-7$	$\sqrt{y}$	
	$\sqrt{y-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
$x+2$	$3y$	
$\frac{x}{x-1}$	$\frac{y}{y-1}$	
	$1+\frac{1}{y}$	x
$\frac{1}{x}$		x
$\frac{2x+3}{x+7}$		x

Correction

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, dashed, "g\circ f"] & \mathbb{R} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \\[-20pt]
x \arrow[r, mapsto] & y=f(x) \arrow[r, mapsto] & z=g(y)=g(f(x))
\end{tikzcd}$$

① $x\mapsto y=x-7\mapsto z=\sqrt{y}=\sqrt{x-7}$

② $x\mapsto y=x+2\mapsto z=3y=3x+6$

③ $x\mapsto y=\frac{x}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}\mapsto z=\frac{y}{y-1}=1+\frac{1}{y-1}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{x-1}-1}=x$

④ $x\mapsto y=f(x)\mapsto z=\sqrt{y-5}=\sqrt{f(x)-5}=\sqrt{x^2-5}$ donc $f(x)=x^2$

⑤ $x\mapsto y=f(x)\mapsto z=1+\frac{1}{y}=1+\frac{1}{f(x)}=x$ donc $f(x)=\frac{1}{x-1}$

⑥ $x\mapsto y=\frac{1}{x}\mapsto z=g(y)=g\left(\frac{1}{x}\right)=x$ *i.e.* $g=f^{-1}$: on cherche x tel que $y=\frac{1}{x}$ donc $g(y)=\frac{1}{y}$

⑦ $x\mapsto y=\frac{2x+3}{x+7}\mapsto z=g(y)=g\left(\frac{2x+3}{x+7}\right)=x$ *i.e.* $g=f^{-1}$: on cherche x tel que $y=\frac{2x+3}{x+7}$ donc $g(y)=\frac{3-7y}{y-2}$

Ainsi

$f(x)$	$g(y)$	$g(f(x))$
$x-7$	$\sqrt{y}$	$\sqrt{x-7}$
$x+2$	$3y$	$3x+6$
$\frac{x}{x-1}$	$\frac{y}{y-1}$	x
x^2	$\sqrt{y-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
$\frac{1}{x-1}$	$1+\frac{1}{y}$	x
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{y}$	x
$\frac{2x+3}{x+7}$	$\frac{3-7y}{y-2}$	x

Parité

Exercice 3.6

Parmi les fonctions suivantes, quelles sont celles qui sont paires ou impaires ?

$$f_1(x)=x^2-1+\sin^2(x),\qquad f_2(x)=\frac{\tan(x)-x}{x^3\cos(x)},\qquad f_3(x)=\frac{\sin^2(2x)-\cos(3x)}{\tan(x)},\qquad f_4(x)=\frac{x-1}{\sin(x+1)}+\cos(x).$$

Correction

$$f_1(-x)=(-x)^2-1+\sin^2(-x)=x^2-1+(-\sin(x))^2=x^2-1+\sin^2(x)=f_1(x),\qquad f_1 \text{ est paire;}$$

$$f_2(-x)=\frac{\tan(-x)+x}{(-x)^3\cos(-x)}=\frac{-\tan(x)+x}{-x^3\cos(x)}=\frac{\tan(x)-x}{x^3\cos(x)}=f_2(x),\qquad f_2 \text{ est paire;}$$

$$f_3(-x)=\frac{\sin^2(-2x)-\cos(-3x)}{\tan(-x)}=\frac{(-\sin(2x))^2-\cos(3x)}{-\tan(x)}=-\frac{\sin^2(2x)-\cos(3x)}{\tan(x)}=-f_3(x),\qquad f_3 \text{ est impaire;}$$

$$f_4(-x)=\frac{-x-1}{\sin(-x+1)}+\cos(-x)=\frac{-x-1}{\sin(-x+1)}+\cos(x),\qquad f_4 \text{ n'est ni paire ni impaire.}$$

Périodicité

Exercice 3.7

Calculer la période des fonctions suivantes :

$$f_1(x)=\cos(3x),\qquad f_2(x)=\sqrt{\tan(x)},\qquad f_3(x)=\cos^4(8x),\qquad f_4(x)=|\cos(5x)|,$$

$$f_5(x)=\cos(3x)+\sin(2x),\qquad f_6(x)=\frac{\cos(5x)}{\sin(5x)},\qquad f_7(x)=\cos(5x)\sin(3x),\qquad f_8(x)=\cos(3x)\sin(3x).$$

Correction

1. $\cos(y)$ est 2π-périodique donc f_1 est $\frac{2\pi}{3}$-périodique.
2. La racine ne change pas la période et comme $\tan(y)$ est π-périodique alors f_2 est π-périodique.
3. $\cos(8y)$ est $\frac{\pi}{4}$-périodique donc f_3 est $\frac{\pi}{8}$-périodique.
4. $\cos(5y)$ est $\frac{2\pi}{5}$-périodique donc f_4 est $\frac{\pi}{5}$-périodique.
5. $\cos(3x)$ est $\frac{2\pi}{3}$-périodique $\sin(2x)$ est $\frac{2\pi}{2}$-périodique donc f_5 a période égale à $p.p.c.m.\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right)=2\pi$
6. $\cos(5x)$ et $\sin(5x)$ sont $\frac{2\pi}{5}$-périodiques donc f_6 est $\frac{\pi}{5}$-périodique
7. $\cos(5x)$ est $\frac{2\pi}{5}$-périodique $\sin(3x)$ est $\frac{2\pi}{3}$-périodique donc f_7 a période égale à $p.p.c.m.\left(\frac{2\pi}{5},\frac{2\pi}{3}\right)=2\pi$
8. $\cos(3x)$ et $\sin(3x)$ sont $\frac{2\pi}{3}$-périodiques donc f_7 est $\frac{\pi}{3}$-périodique

Fonctions usuelles et graphes

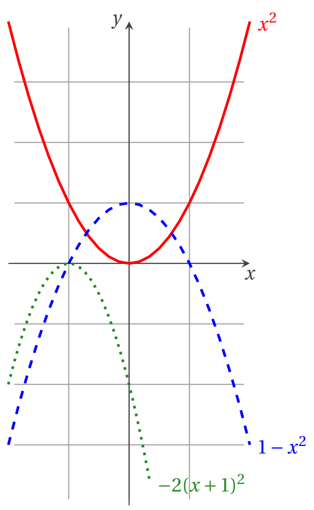
Exercice 3.8

Pour chaque fonction $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, indiquer l'ensemble de définition et l'ensemble image et tracer à main levée la courbe représentative :

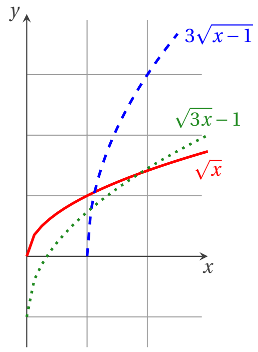
1. $f(x)=x^2$
2. $f(x)=1-x^2$
3. $f(x)=-2(x+1)^2$
4. $f(x)=\sqrt{x}$
5. $f(x)=3\sqrt{x-1}$
6. $f(x)=\sqrt{3x}-1$
7. $f(x)=\ln(x)$
8. $f(x)=\ln(-x)$
9. $f(x)=\ln(x-1)$
10. $f(x)=e^x$
11. $f(x)=e^{x-1}$
12. $f(x)=e^{-x}$
13. $f(x)=\cos(x)$
14. $f(x)=\cos(2x)$
15. $f(x)=1+\cos(2x)$

Correction

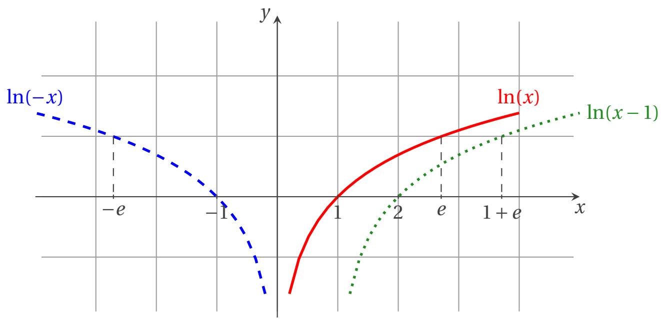
1. L'ensemble de définition de la fonction $f(x)=x^2$ est $\mathbb{R}$, l'ensemble image est $\mathbb{R}_+$.
2. L'ensemble de définition de la fonction $f(x)=1-x^2$ est $\mathbb{R}$, l'ensemble image est $]-\infty;1]$.
3. L'ensemble de définition de la fonction $f(x)=-2(x+1)^2$ est $\mathbb{R}$, l'ensemble image est $\mathbb{R}_-$.



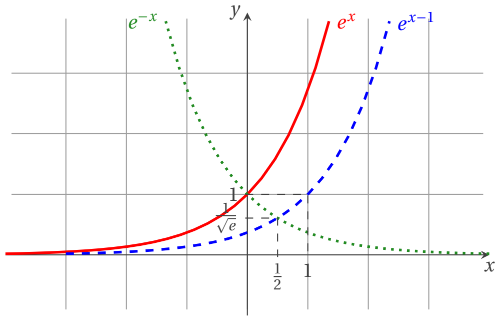
4. L'ensemble de définition de la fonction $f(x)=\sqrt{x}$ est $\mathbb{R}_+$, l'ensemble image est $\mathbb{R}_+$.
5. L'ensemble de définition de la fonction $f(x)=3\sqrt{x-1}$ est $[1;+\infty[$, l'ensemble image est $\mathbb{R}_+$.
6. L'ensemble de définition de la fonction $f(x)=\sqrt{3x}-1$ est $\mathbb{R}_+$, l'ensemble image est $[-1;+\infty[$. Notons que la fonction $\sqrt{3x}=\sqrt{3}\sqrt{x}$ peut être vue soit comme une contraction en x de 3 soit comme une dilatation en y de $\sqrt{3}$.



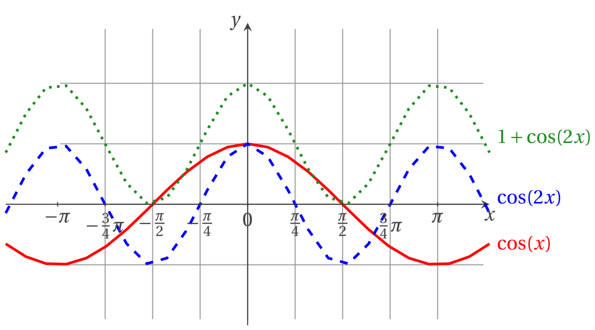
7. L'ensemble de définition de la fonction $f(x) = \ln(x)$ est $]0;+\infty[$, l'ensemble image est $\mathbb{R}$.
8. L'ensemble de définition de la fonction $f(x) = \ln(-x)$ est $]-\infty;0[$, l'ensemble image est $\mathbb{R}$.
9. L'ensemble de définition de la fonction $f(x) = \ln(x-1)$ est $]1;+\infty[$, l'ensemble image est $\mathbb{R}$.



10. L'ensemble de définition de la fonction $f(x) = e^x$ est $\mathbb{R}$, l'ensemble image est $\mathbb{R}_+^*$.
11. L'ensemble de définition de la fonction $f(x) = e^{x-1}$ est $\mathbb{R}$, l'ensemble image est $\mathbb{R}_+^*$.
12. L'ensemble de définition de la fonction $f(x) = e^{-x}$ est $\mathbb{R}$, l'ensemble image est $\mathbb{R}_+^*$.



13. L'ensemble de définition de la fonction $f(x) = \cos(x)$ est $\mathbb{R}$, l'ensemble image est $[-1;1]$.
14. L'ensemble de définition de la fonction $f(x) = \cos(2x)$ est $\mathbb{R}$, l'ensemble image est $[-1;1]$.
15. L'ensemble de définition de la fonction $f(x) = 1+\cos(2x)$ est $\mathbb{R}$, l'ensemble image est $[0;2]$.



Exercice 3.9

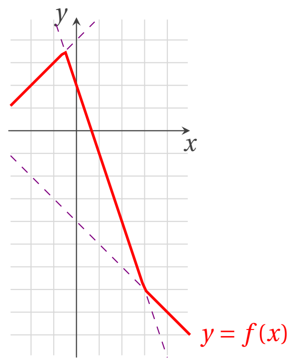
Soit $f : x \mapsto |x-3| - |2x+1|$ définie sur $\mathbb{R}$. Simplifier en fonction d'intervalles de valeurs pour x l'expression de $f(x)$ puis tracer la courbe représentative de la fonction f.

Correction

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{si } x \geq 3 \\ -(x-3) & \text{si } x < 3 \end{cases} \qquad |2x+1| = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \geq -1/2 \\ -(2x+1) & \text{si } x < -1/2 \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} f(x) &= |x-3| - |2x+1| \\ &= \begin{cases} (-x+3)-(-2x-1) & \text{si } x < -\frac{1}{2} \\ (-x+3)-(2x+1) & \text{si } -\frac{1}{2} \leq x < 3 \\ (x-3)-(2x+1) & \text{sinon.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} x+4 & \text{si } x < -\frac{1}{2} \\ -3x+2 & \text{si } -\frac{1}{2} \leq x < 3 \\ -x-4 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$



Exercice 3.10

On considère la fonction

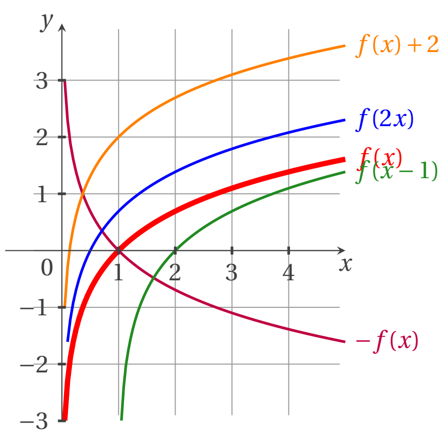
$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(x) \end{aligned}$$

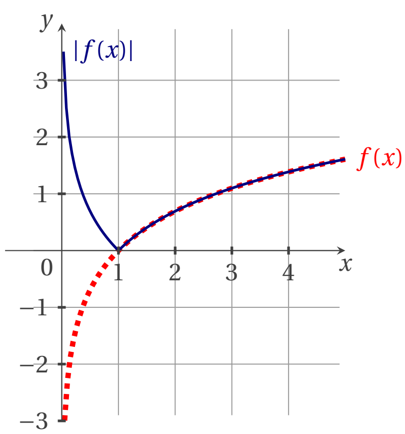
Tracer à main levée les courbes représentatives des fonctions :

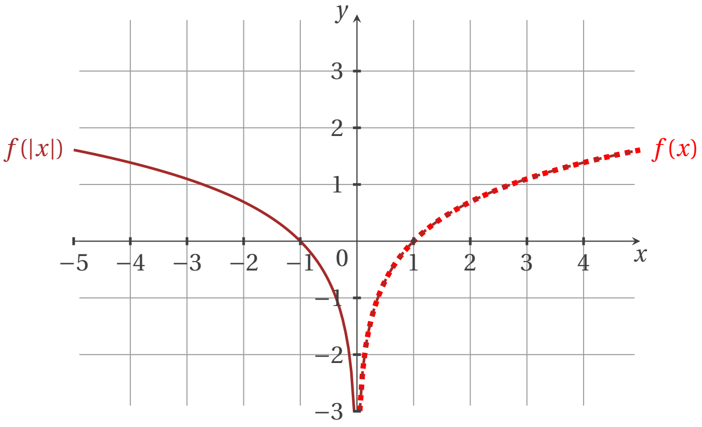
1. $x \mapsto f(x)$,
2. $x \mapsto -f(x)$,
3. $x \mapsto f(x)+2$,
4. $x \mapsto f(2x)$,
5. $x \mapsto f(x-1)$,
6. $x \mapsto f(|x|)$,
7. $x \mapsto |f(x)|$.

Correction

1. $f(x) = \ln(x)$ est une fonction définie pour $x > 0$; elle est strictement croissante sur son domaine de définition ; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $f(1) = 0$ et $f(e) = 1$.
2. Le graphe de $-f(x)$ est symétrique à celui de $f(x)$ par rapport à l'axe des abscisse.
3. Le graphe de $f(x)+2$ est une translation de celui de $f(x)$ vers le haut de 2 unités.
4. Le graphe de $f(2x)$ est une contraction de celui de $f(x)$ de 2 unités.
5. Le graphe de $f(x-1)$ est une translation de celui de $f(x)$ de 1 unité vers la droite.
6. $f(|x|) = f(x)$ si $x > 0$ et $f(|x|) = f(-x)$ si $x < 0$, on en déduit que son graphe coïncide avec celui de $f(x)$ si $x > 0$, tandis que pour $x < 0$ son graphe est le symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
7. $|f(x)| = f(x)$ si $f(x) > 0$ (donc si $x > 1$) ; $|f(x)| = -f(x)$ si $f(x) < 0$ (donc si $x < 1$).





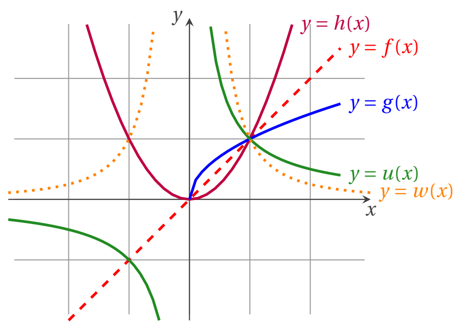


Exercice 3.11

Tracer sur un même graphique les courbes représentatives des fonctions suivantes après avoir précisé leur ensemble de définition respectifs (ne pas faire de tracé point par point!) :

$$f: x \mapsto x, \qquad g: x \mapsto \sqrt{x}, \qquad h: x \mapsto x^2, \qquad u: x \mapsto \frac{1}{x} \qquad w: x \mapsto \frac{1}{x^2}.$$

Correction

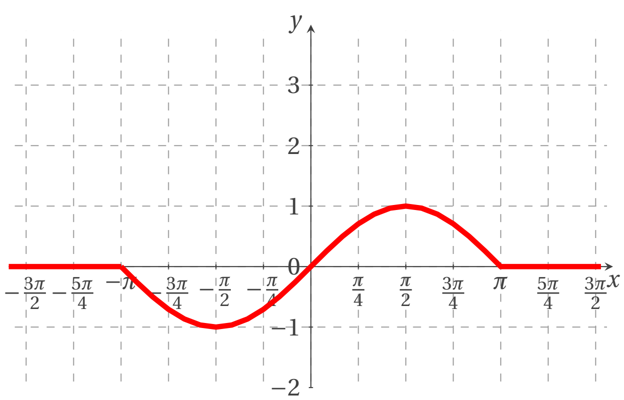


Exercice 3.12

Dans la figure ci-dessous on a représenté la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \in [-\pi;\pi], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

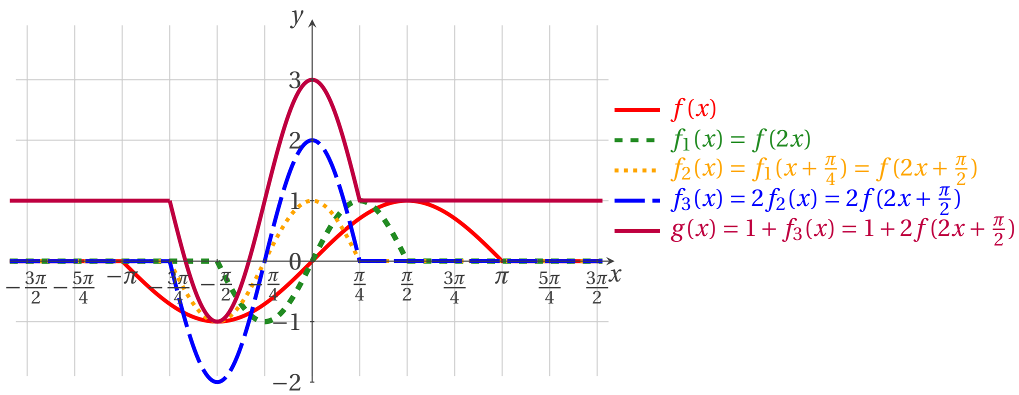
Tracer dans la même figure le graphe de la fonction $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 1 + 2f\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.



Correction

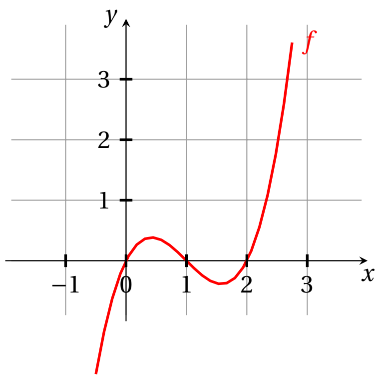
On pourra utiliser les transformations élémentaires suivantes :

- ⋆ $f_1(x) = f(2x) = f(u(x))$ avec $u(x) = 2x$,
- ⋆ soit on considère $f_2(x) = f_1\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = f_1(v(x))$ avec $v(x) = x+\frac{\pi}{4}$ donc $f_2(x) = f_1(v(x)) = f(u(v(x))) = f(2v(x)) = f\left(2\left(+\frac{\pi}{4}\right)\right) = f\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$, soit on considère $f_2(x) = f\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) = f(w(u(x))$ avec $w(x) = x+\frac{\pi}{2}$ et $u(x) = 2x$,
- ⋆ $f_3(x) = 2f_2(x) = 2f\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$
- ⋆ $g(x) = 1+f_3(x) = 1+2f\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$.

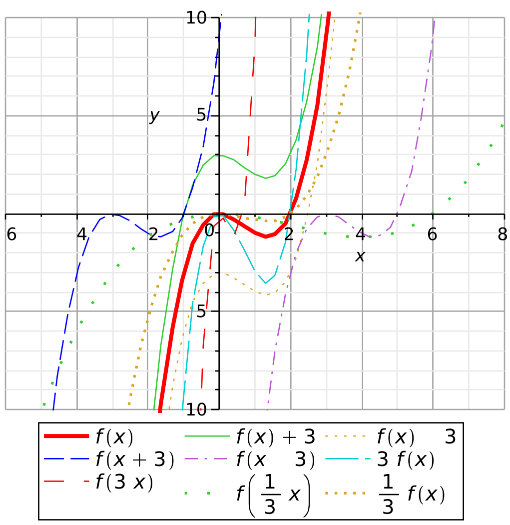


Exercice 3.13

Pour la fonction dont le graphe est reproduit ci-contre, tracer, sans faire de calcul, une esquisse des graphes des fonctions $f(x)+3$, $f(x)-3$, $f(x+3)$, $f(x-3)$, $3f(x)$, $f(3x)$, $f(x/3)$ $f(x)/3$.

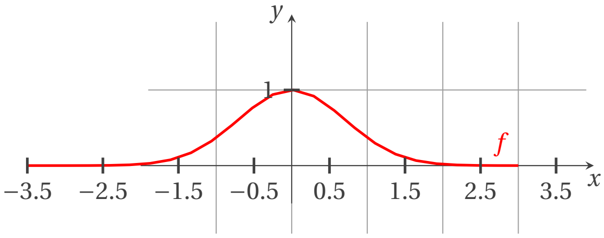


Correction

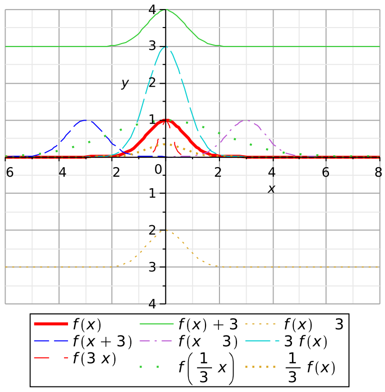


Exercice 3.14

Pour la fonction dont le graphe est reproduit plus bas, tracer, sans faire de calcul, une esquisse des graphes des fonctions $f(x)+3$, $f(x)-3$, $f(x+3)$, $f(x-3)$, $3f(x)$, $f(3x)$, $f(x/3)$ $f(x)/3$.



Correction

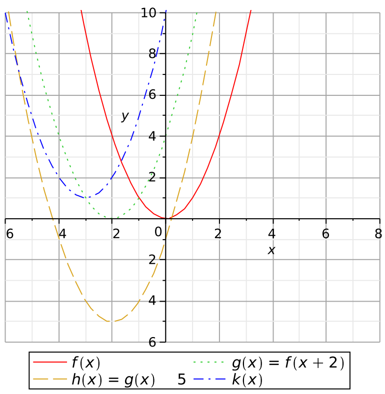


Exercice 3.15

Tracer dans un même plan cartésien le graphe des fonctions définies par $f(x) = x^2$, $g(x) = (x+2)^2$, $h(x) = (x+2)^2 - 5$, $k(x) = x^2 + 6x + 10$.

Correction

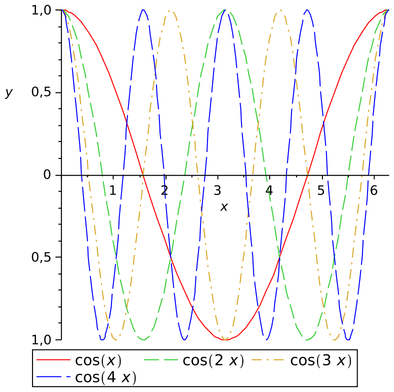
Notons que $k(x) = x^2 + 6x + 10 = (x+\alpha)^2 + \beta = x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta$ ainsi $2\alpha = 6$ et $\beta = 10 - \alpha^2$ donc $k(x) = (x+3)^2 + 1$.



Exercice 3.16

Tracer le graphe de la fonction définie par $f(x) = \cos(nx)$ pour $n = 1, 2, 3, 4$.

Correction



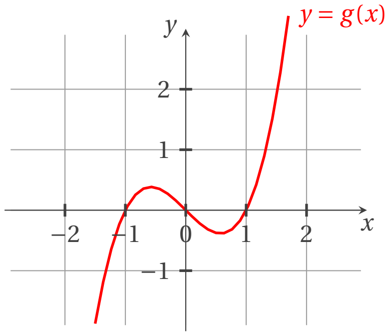
Exercice 3.17

Discuter graphiquement suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le nombre et la position des solutions de l'équation $f(x) = 0$ pour :

1. $f(x) = x^3 - x - m$,
2. $f(x) = \cos(5x) - m$.

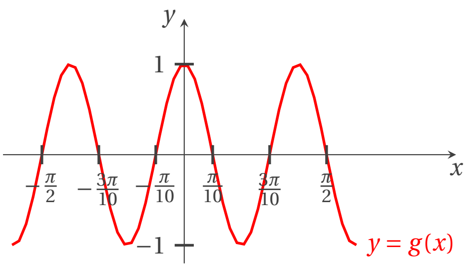
Correction

1. On cherche les intersections de la fonction définie par $g(x) = x^3 - x$ avec la droite d'équation $y = m$:



Si $|m| > \frac{1}{\sqrt{3^3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$, il y a une seule intersection ; si $|m| < \frac{1}{\sqrt{3^3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$ il y a trois intersections ; si $|m| = \frac{1}{\sqrt{3^3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$ il y a deux intersections.

2. On cherche les intersections de la fonction définie par $g(x) = \cos(5x)$ avec la droite d'équation $y = m$:



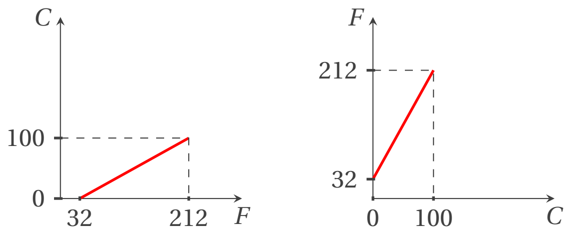
Si $|m| > 1$, il n'y a pas d'intersections, sinon il y a une infinité d'intersections.

Exercice 3.18 (Échelles de température)

Une température de 32 °F correspondent à 0 °C tandis que 100 °C correspondent à 212 °F. Les échelles de température sont linéaires. Donner les équations de conversion de Celsius en Fahrenheit et vice-versa. Comment évolue la température exprimée en degrés Celsius lorsqu'elle augmente d'un degré Fahrenheit ? Que vaut le zéro absolu (−273.15 °C) en degré Fahrenheit ?

Correction

$F = \frac{9}{5}C + 32$, $C = \frac{5}{9}F - \frac{160}{9}$. Lorsqu'elle augmente d'un degré Fahrenheit, la température augmente de 5/9 degrés Celsius. −273.15 °C correspondent à −459.67 °F

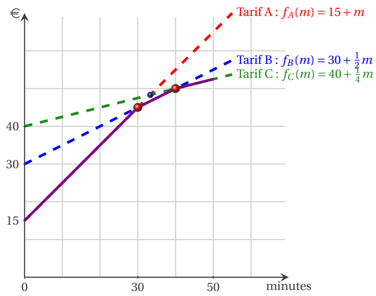


Exercice 3.19

Un réseau de téléphonie mobile annonce ses tarifs :
Tarif A : une redevance fixe de 15 € par mois et 1 € par minute.
Tarif B : une redevance fixe de 30 € par mois et 0.5 € par minute.
Tarif C : une redevance fixe de 40 € par mois et 0.25 € par minute.
Quelle formule choisir lorsque l'on téléphone m minutes par mois en moyenne ?

Correction
Soit m la durée de communication par mois en minutes. On choisira A, B ou C selon que $m \le 30$, $30 \le m \le 40$ ou $m \ge 40$:

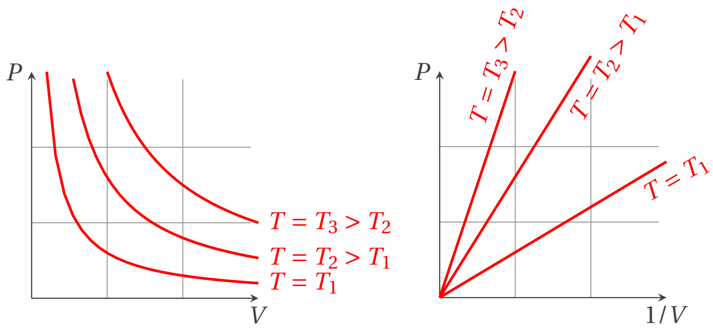
$$\text{Formule optimale}(m) = \begin{cases} 15+m & \text{si } m \le 30, \\ 30+m/2 & \text{si } 30 \le \le 40, \\ 40+m/4 & \text{si } m \ge 40, \end{cases}$$



Exercice 3.20 (Gaz parfait)

D'après la loi de Boyle-Mariotte pour les gaz parfaits, la pression P, le volume V et la température T d'un gaz obéissent à la loi $PV = nRT$ où R est une constante et n représente le nombre de moles du gaz. Représenter l'évolution de la pression en fonction du volume lorsque la température et le nombre de moles sont maintenus constants. Recommencer pour différentes valeurs de température.

Correction



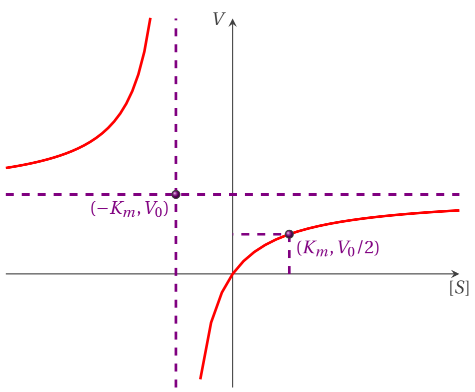
Exercice 3.21

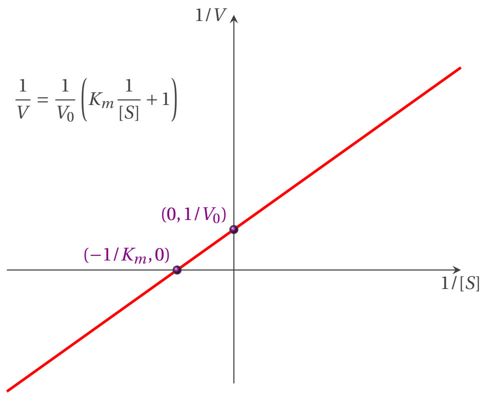
D'après Michaelis et Menten, la vitesse V de réaction enzymatique dépend de la concentration en substrat $[S]$ selon la loi

$$V([S]) = V_0 \frac{[S]}{[S] + K_m}$$

où $[S]$ est la concentration en substrat, $V_0 > 0$ est une constante propre à la réaction et $K_m > 0$ est la constante de MICHAELIS-MENTEN spécifique de l'enzyme. Vérifier que K_m est la concentration en substrat pour laquelle la vitesse de la réaction est égale à $V_0/2$ et tracer une esquisse de l'évolution de V en fonction de $[S]$. Tracer ensuite le graphe de $1/V$ en fonction de $1/[S]$.

Correction
$V(K_m) = V_0 \frac{K_m}{K_m+K_m} = \frac{V_0}{2}$. Le graphe de $[S] \mapsto V$ est une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes et se coupent en $(-K_m, V_0)$; le graphe de $1/[S] \mapsto 1/V$ est une droite passant par $(-1/K_m, 0)$ et $(0, 1/V_0)$.

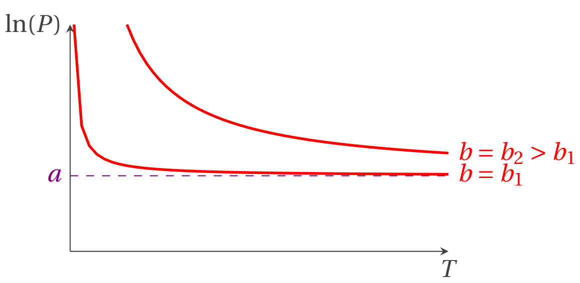


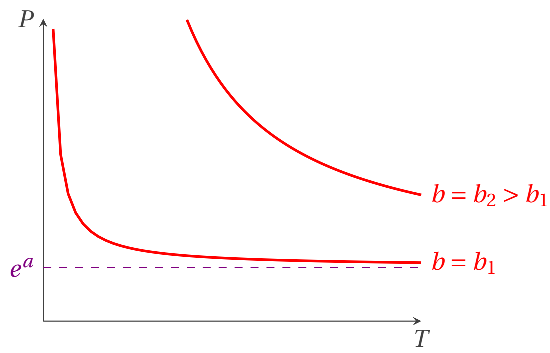


Exercice 3.22

La température T d'ébullition de l'eau est liée à la pression P qui règne au-dessus du liquide par la relation $\ln(P) = a + b/T$ où a et b sont des constantes. Tracer une esquisse de l'évolution de $\ln(P)$ en fonction de T. Exprimer P en fonction de T.

Correction
$P = e^{a+b/T}$

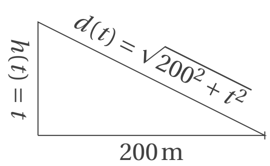




Exercice 3.23

Une montgolfière s'élève du sol à la verticale à une vitesse de $1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Exprimer la distance entre la montgolfière et un observateur initialement situé à 200 m.

Correction



Exercice 3.24

Une approximation de l'angle ϑ qu'un pendule fait avec la verticale au temps t est donnée par

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\, t\right)$$

où ϑ_0 est l'angle de départ, ℓ est la longueur du pendule en mètres, g est la constante de gravité (=9.81 m s^{-1}). Tracer le graphe de $t \mapsto \vartheta(t)$. Combien d'oscillations le pendule fait-il par seconde ? Combien de secondes faut-il au pendule pour faire une oscillation complète ?

Correction

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}}, \qquad T = \frac{1}{\nu}$$

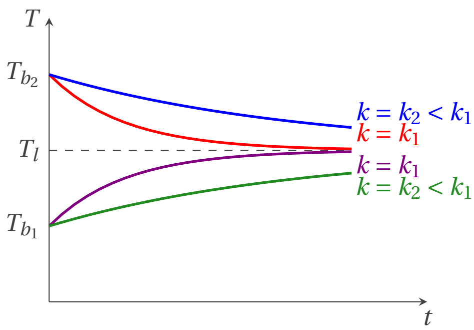
Exercice 3.25

L'évolution de la température T d'une bille de température initiale T_b plongée dans un liquide de température T_l est décrite par

$$T(t) = T_l + (T_b - T_l)e^{-kt}$$

où k est une constante propre au liquide. Tracer le graphe de cette fonction pour différentes valeurs de k.

Correction



Injectivité, surjectivité...

Exercice 3.26

Comment doit-on compléter la définition suivante : “ Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. On dit que f est **injective** si...”

☐ tout élément x de E n'a qu'une image par f
☐ tout élément y de F a au moins un antécédent par f
☐ tout élément y de F a au plus un antécédent par f
☐ tout élément y de F a exactement un antécédent par f
☐ pour tous x et y de E, la relation $f(x) = f(y)$ implique $x = y$

Correction

☐ tout élément x de E n'a qu'une image par f
Cette assertion exprime que f est une application
☐ tout élément y de F a au moins un antécédent par f
Cette assertion pourrait compléter la définition d'une application surjective
■ tout élément y de F a au plus un antécédent par f
☐ tout élément y de F a exactement un antécédent par f
Cette assertion pourrait compléter la définition d'une application bijective
■ pour tous x et y de E, la relation $f(x) = f(y)$ implique $x = y$

Exercice 3.27

Comment doit-on compléter la définition suivante : “ Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. On dit que f est **surjective** si...”

☐ tout élément x de E n'a qu'une image par f
☐ tout élément y de F a au moins un antécédent par f
☐ tout élément y de F a au plus un antécédent par f

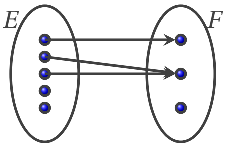
☐ tout élément y de F a exactement un antécédent par f
☐ pour tous x et y de E, la relation $f(x) = f(y)$ implique $x = y$

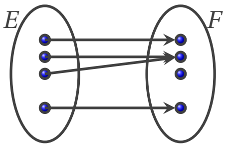
Correction

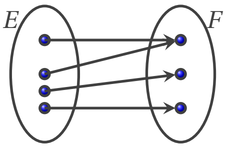
☐ tout élément x de E n'a qu'une image par f
Cette assertion exprime que f est une application
■ tout élément y de F a au moins un antécédent par f
☐ tout élément y de F a au plus un antécédent par f
Cette assertion pourrait compléter la définition d'une application injective
☐ tout élément y de F a exactement un antécédent par f
Cette assertion pourrait compléter la définition d'une application bijective
☐ pour tous x et y de E, la relation $f(x) = f(y)$ implique $x = y$
Cette assertion pourrait compléter la définition d'une application injective

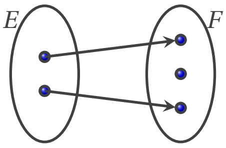
Exercice 3.28

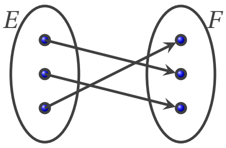
Soit E et F deux ensembles. Pour chaque fonction de E dans F représentée ci-dessous, déterminer le domaine de définition, et si elle est injective et/ou surjective.

1. 

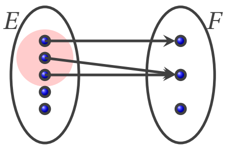
2. 

3. 

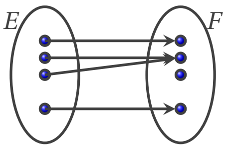
4. 

5. 

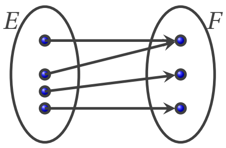
Correction

1. 

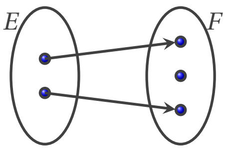
Fonction définie sur les trois éléments entourés en rose. Ni injective ni surjective.

2. 

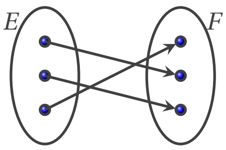
Fonction définie sur E, ni injective ni surjective.

3. 

Fonction définie sur E, surjective non injective.

4. 

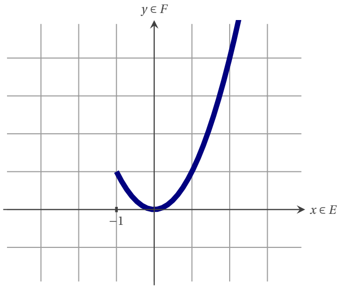
Fonction définie sur E, injective non surjective.

5. 

Fonction définie sur E, c'est une bijection.

Exercice 3.29

Soit E et F deux sous ensembles de $\mathbb{R}$ et f une fonction de E dans F dont le graphe est tracé ci-dessous :

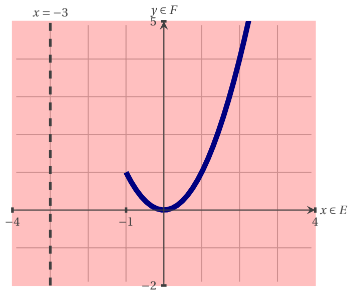


Pour chaque choix de E et de F déterminer si la fonction est une application et si elle est injective et/ou surjective :

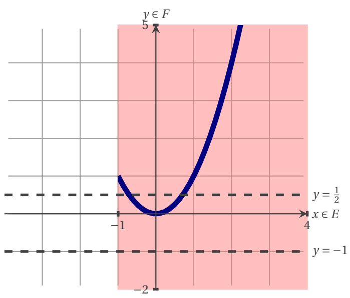
1. $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$
2. $E = [-1; +\infty[$ et $F = \mathbb{R}$
3. $E = [-1; +\infty[$ et $F = [0; +\infty[$
4. $E = [-1; 0]$ et $F = [0; +\infty[$
5. $E = [-1; 0]$ et $F = [0; 1]$

Correction

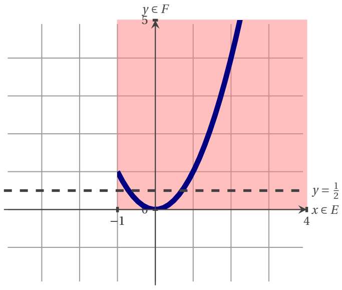
1. $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$:
   - ⋆ elle est une fonction car toute droite d'équation $x = \kappa$ avec $\kappa \in \mathbb{R}$ intersecte le graphe de f au plus une fois,
   - ⋆ elle n'est pas une application car la droite d'équation $x = -3$ n'intersecte jamais le graphe de f.



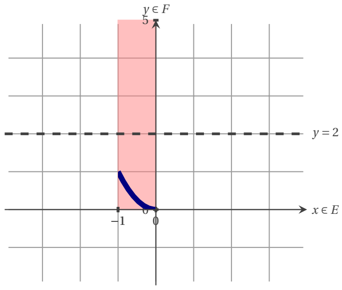
2. $E = [-1; +\infty[$ et $F = \mathbb{R}$:
   - ⋆ elle est une application car toute droite d'équation $x = \kappa$ avec $\kappa \in [-1; +\infty[$ intersecte le graphe de f exactement une fois,
   - ⋆ elle n'est pas injective car la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ intersecte le graphe de f plus d'une fois,
   - ⋆ elle n'est pas surjective car la droite d'équation $y = -1$ n'intersecte jamais le graphe de f.



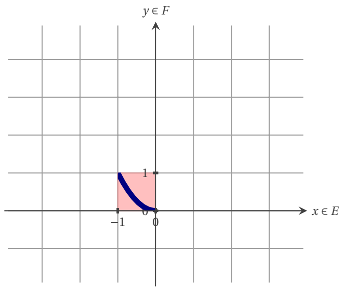
3. $E = [-1; +\infty[$ et $F = [0; +\infty[$:
   - ⋆ elle est une application car toute droite d'équation $x = \kappa$ avec $\kappa \in [-1; +\infty[$ intersecte le graphe de f exactement une fois,
   - ⋆ elle n'est pas injective car la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ intersecte le graphe de f plus d'une fois,
   - ⋆ elle est surjective car toute droite d'équation $y = \kappa$ avec $\kappa \in [0; +\infty[$ intersecte au moins une fois le graphe de f.



4. $E = [-1;0]$ et $F = [0;+\infty[$:
   - ⋆ elle est une application car toute droite d'équation $x = \kappa$ avec $\kappa \in [-1;0]$ intersecte le graphe de f exactement une fois,
   - ⋆ elle est injective car toute droite d'équation $y = \kappa$ avec $\kappa \in [-1;0]$ intersecte le graphe de f au plus une fois,
   - ⋆ elle n'est pas surjective car la droite d'équation $y = 2$ n'intersecte jamais le graphe de f.

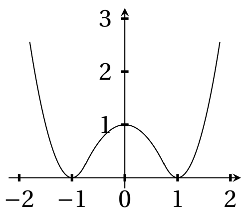


5. $E = [-1;0]$ et $F = [0;1]$:
   - ⋆ elle est une application car toute droite d'équation $x = \kappa$ avec $\kappa \in [-1;0]$ intersecte le graphe de f exactement une fois,
   - ⋆ elle est injective car toute droite d'équation $y = \kappa$ avec $\kappa \in [-1;0]$ intersecte le graphe de f au plus une fois,
   - ⋆ elle est surjective car toute droite d'équation $y = \kappa$ avec $\kappa \in [0;1]$ intersecte au moins une fois le graphe de f.



Exercice 3.30

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique est donnée ci-contre.



1. Quelle est l'image de 0 par f ?
2. Donner, en fonction de y, le nombre d'antécédents de y par f.
3. f est-elle injective ? f est-elle surjective ?

Correction

1. $f(0) = 1$
2. Notons $n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ la fonction qui donne le nombre d'antécédents de y par f en fonction de y. On trouve

$$n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{N}$$
$$y \mapsto \begin{cases} 2 & \text{si } y > 1, \\ 3 & \text{si } y = 1, \\ 4 & \text{si } 0 < y < 1, \\ 2 & \text{si } y = 0, \\ 0 & \text{si } y < 0. \end{cases}$$

3. f n'est pas injective car par exemple $f(-1) = f(1)$. f n'est pas surjective car par exemple $y = -1$ n'a pas d'antécédents.

Exercice 3.31

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?
3. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
4. Montrer que la restriction $g\colon [-1, 1] \to [-1, 1]$ avec $g(x) = f(x)$ est une bijection.

Correction

Remarquons que f est une application car $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.

1. f n'est pas injective car $f(2) = f(\frac{1}{2}) = \frac{4}{5}$
2. f n'est pas surjective car $y = 2$ n'a pas d'antécédents
3. Pour montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :
   - ⋆ on étudie la fonction et on note que le maximum absolu est 1 et que le minimum absolu est -1
   - ⋆ on résout $y = f(x)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$: ceci est équivalente à résoudre $yx^2 - 2x + y = 0$ qui admet des solutions réelles ssi $4 - 4y^2 \ge 0$ ssi $y \in [-1, 1]$. On a alors prouvé que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
4. Soit $y \in [-1, 1]$, alors les solutions possibles de $g(x) = y$ sont $x = \frac{1\pm\sqrt{1-y^2}}{y}$. Or, seul $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} \in [-1, 1]$ donc pour $g\colon [-1, 1] \to [-1, 1]$ on a trouvé un inverse $h\colon [-1, 1] \to [-1, 1]$ définie par $h(y) = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} = \frac{y}{1+\sqrt{1-y^2}}$, donc g est une bijection.

Exercice 3.32

Soit $f\colon [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ définie par $f(x) = x^2 - 1$. f est-elle bijective ?

Correction

- ⋆ f est injective car

$$\begin{cases} f(a) = f(b) \\ a, b \in [1, +\infty[\end{cases} \implies \begin{cases} a^2 - 1 = b^2 - 1 \\ a, b \in [1, +\infty[\end{cases} \implies \begin{cases} a = \pm b \\ a, b \in [1, +\infty[\end{cases} \implies a = b.$$

- ⋆ f est surjective car pour tout $y \in [0, +\infty[$, l'élément $x = \sqrt{y+1}$ est tel que $\begin{cases} x \in [1, +\infty[\\ f(x) = y \end{cases}$.

Exercice 3.33

Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? Surjectives ? Bijectives ?

1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $f(n) = 2n$,
2. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $f(n) = -n$,
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$,
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ telle que $f(x) = x^2$,
5. $f : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$,
6. $f : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+$ telle que $f(x) = x^2$,
7. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $f(n) = n + 1$,
8. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ telle que $f(n) = n + 1$,
9. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $f(n) = n + 1$,
10. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y) = (x + y, x - y)$.

Correction

1. est injective car $f(n_1) = f(n_2)$ implique $n_1 = n_2$ mais n'est pas surjective car tous les y impaires n'ont pas d'antécédents,
2. est bijective,
3. n'est pas injective car $f(-1) = f(1) = 1$ ni surjective car $y = -2$ n'a pas d'antécédents,
4. n'est pas injective car $f(-1) = f(1) = 1$ mais elle est surjective,
5. est injective mais n'est pas surjective car $y = -2$ n'a pas d'antécédents,
6. est bijective,
7. est injective mais n'est pas surjective car $y = 0$ n'a pas d'antécédents,

8. est bijective,
9. est bijective car pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $k = n+1 \iff n = k-1$,
10. est bijective :
    - ⋆ est injective car $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \implies (x_1 + y_1, x_1 - y_1) = (x_2 + y_2, x_2 - y_2) \implies (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$
    - ⋆ est surjective car tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ a comme antécédent $(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 3.34

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \ln\left(|x| + \frac{1}{e}\right)$.

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?
3. Montrer que la restriction $g: [0, +\infty[\to [-1, +\infty[$ avec $g(x) = f(x)$ est une bijection et calculer la fonction réciproque h.

Attention : on peut s'aider en traçant le graphe de f et en considérant les intersections de ce graphe avec des droites horizontales, mais cela ne constitue pas une preuve !

Correction

1. f n'est pas injective car $f(x) = f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (la fonction est paire)
2. f n'est pas surjective car tout $y < -1$ n'a pas d'antécédents
3. Soit $y \in [-1, +\infty[$, alors les solutions possibles de $g(x) = y$ sont $x = \pm(e^y - 1/e)$. Or, seul $x = e^y - 1/e \in [0, +\infty[$ donc pour $g: [0, +\infty[\to [-1, +\infty[$ on a trouvé une inverse $h: [-1, +\infty[\to [0, +\infty[$ définie par $h(y) = e^y - 1/e$, donc g est une bijection.

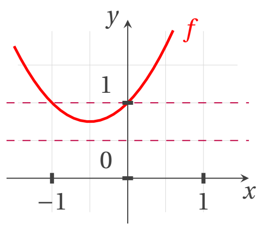
Attention, ne pas confondre $\ln\left(|x| + \frac{1}{e}\right)$ et $\ln\left(\left|x + \frac{1}{e}\right|\right)$.

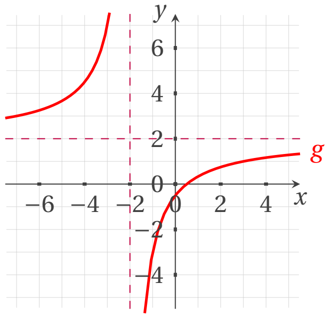
Exercice 3.35

1. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 + x + x^2$. Est-elle injective ? Est-elle surjective ?
2. Soit g l'application de $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{2x-1}{x+2}$. Est-elle injective ? Est-elle surjective ?

Correction

1. f n'est pas injective car $f(-1) = f(0) = 1$ ni surjective car $y = 0$ n'a pas d'antécédents.
2. g est injective mais n'est pas surjective car $y = 2$ n'a pas d'antécédents.





Exercice 3.36 (composition, réciprocité)

Soient f, g les deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = 7x^2 - 2$. Montrer que f admet une application réciproque (que l'on calculera), puis que g n'en admet pas. Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$.

Correction

- ⋆ f est bijective donc elle admet une fonction réciproque ; comme $y = 2x + 1$ ssi $x = (y-1)/2$ on obtient

$$\begin{aligned} f^{-1} \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto \frac{y-1}{2} \end{aligned}$$

- ⋆ g n'admet pas d'application réciproque car elle n'est pas injective (ni surjective).
- ⋆ $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et l'on a $x \mapsto y = 2x + 1 \mapsto 7y^2 - 2 = 7(2x+1)^2 - 2 = 28x^2 + 28x + 5$ donc $g(f(x)) = 28x^2 + 28x + 5$,

★ $f\circ g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et l'on a $x\mapsto y=7x^2-2\mapsto 2y+1=2(7x^2-2)+1=14x^2-3$ donc $f(g(x))=14x^2-3$.

Exercice 3.37 (réciprocité)

1. Soit l'application f de $E=\mathbb{R}^2$ dans $F=\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y)=(2x+y,x-2y)$. Démontrer que f admet une application réciproque (que l'on calculera).
2. Soit l'application f de $]1,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$ définie par $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^3-1}}$. Démontrer que f admet une application réciproque (que l'on calculera).
3. L'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=1+x+x^2$ admet-elle une application réciproque ?

Correction

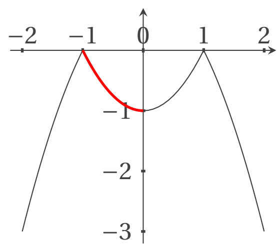
1. f admet une réciproque ssi f et bijective :
   ★ démontrons que f est injective : soit $(a_1,b_1)\in F$ et $(a_2,b_2)\in F$. Alors il existe $(x_1,y_1)\in E$ et $(x_2,y_2)\in E$ tels que $f(x_1,y_1)=(a_1,b_1)$ et $f(x_2,y_2)=(a_2,b_2)$.
   $$(a_1,b_1)=(a_2,b_2)\iff\begin{cases}2x_1+y_1=2x_2+y_2\\ x_1-2y_1=x_2-2y_2\end{cases}\iff (x_1,y_1)=(x_2,y_2);$$
   ★ f est surjective (trivial).

   La réciproque de f est la fonction $f^{-1}\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ telle que $(a,b)\mapsto((2a+b)/5,(a-2b)/5)$.
2. $$\begin{cases}x\in]1,+\infty[\\ y\in]0,+\infty[\\ y=\frac{1}{\sqrt{x^3-1}}\end{cases}\iff\begin{cases}x\in]1,+\infty[\\ y\in]0,+\infty[\\ y^2=\frac{1}{x^3-1}\end{cases}\iff\begin{cases}x\in]1,+\infty[\\ y\in]0,+\infty[\\ x^3=\frac{1}{y^2}+1\end{cases}\iff\begin{cases}x\in]1,+\infty[\\ y\in]0,+\infty[\\ x=\sqrt[3]{\frac{1}{y^2}+1}\end{cases}$$
3. No car elle n'est pas bijective ($f(-1)=f(0)$).

Exercice 3.38

Considérons l'application f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x)=-|x^2-1|$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.

1. Soit g l'application définie de $]-1;0]$ dans $[-1;0]$ par $g(x)=f(x)$.
   g est-elle injective ? g est-elle surjective ?
2. Soit h l'application définie de $]-1;0]$ dans $[-1;0[$ par $h(x)=f(x)$.
   Montrer que h est bijective et trouver l'application h^{-1} réciproque inverse de h.



Correction

f est une application si $\forall x\in E,\forall x'\in E,\ x=x'\implies f(x)=f(x')$ (ou, de façon équivalente, $\forall x\in E,\forall x'\in E,\ f(x)\neq f(x')\implies x\neq x'$) ; f est une application injective si $\forall x\in E,\forall x'\in E,\ x\neq x'\implies f(x)\neq f(x')$ (ou, de façon équivalente, $\forall x\in E,\forall x'\in E$, $f(x)=f(x')\implies x=x'$).

1. g est une application injective car pour $x_1,x_2\in]-1;0]$, $f(x_1)=f(x_2)\implies -|x_1^2-1|=-|x_2^2-1|\overset{x_i^2-1\le 0}{\implies} x_1^2-1=x_2^2-1$ $\implies x_1^2=x_2^2\overset{x_i\le 0}{\implies} x_1=x_2$. Elle n'est pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent.
2. h est une application bijective car elle est injective (même démonstration que pour g) et surjective (en effet, pour tout $y\in[-1;0[$, si on pose $x=-\sqrt{1-y}$ alors $x\in]-1;0]$ et $h(x)=y$). Pour trouver h^{-1} application réciproque (inverse) de h on doit isoler x dans l'expression $y=h(x)$ donc
   $$\begin{gathered}y=-|x^2-1|\quad\text{pour } x\in]-1;0] \text{ et } y\in[-1;0[\\ \iff y=x^2-1\iff x^2=y+1\iff x=-\sqrt{y+1}\end{gathered}$$
   donc h^{-1} est l'application de $[-1;0[$ dans $]-1;0]$ définie par $h^{-1}(x)=-\sqrt{x+1}$.

Exercice 3.39

Pour chacune des parties $A_i\subset\mathbb{R}$ ci-dessous, déterminer si A_i est majorée, minorée, bornée, si elle admet une borne supérieure, une borne inférieure, un maximum, un minimum (justifier chaque réponse).

$A_1 = \{1,2,3,5,12\}$ $\quad$ $A_4 = \{3+7q \ : \ q \in \mathbb{N}\}$ $\quad$ $A_7 = \{p/3^n \ : \ p,n \in \mathbb{N}^*\}$
$A_2 = \mathbb{N}$ $\quad$ $A_5 = \{3-7q \ : \ q \in \mathbb{N}\}$ $\quad$ $A_8 = \mathbb{R}$
$A_3 = \mathbb{Z}$ $\quad$ $A_6 = \{p/3^n \ : \ p,n \in \mathbb{N}\}$ $\quad$ $A_9 =]5,6]$

Correction

$A_1 = \{1,2,3,5,12\}$

1.1. $\forall x \in A_1$, $x \geq 1$ donc 1 est un minorant de A_1 et A_1 est minoré
1.2. $\forall x \in A_1$, $x \leq 12$ donc 12 est un majorant de A_1 et A_1 est majoré
1.3. étant minoré et majoré, A_1 est borné
1.4. 1 est un minorant de A_1 qui appartient à A_1 donc 1 est le minimum de A_1
1.5. 12 est un majorant de A_1 qui appartient à A_1 donc 12 est le maximum de A_1
1.6. on en déduit que 1 est la borne inférieure de A_1
1.7. on en déduit que 12 est la borne supérieure de A_1

$A_2 = \mathbb{N}$

2.1. $\forall x \in A_2$, $x \geq 0$ donc 0 est un minorant de A_2 et A_2 est minoré
2.2. A_2 n'admet pas de majorant réel (en effet, si $r \in \mathbb{R}$ est un majorant de A_2, alors $E(r)+1 \in A_2$ et $E(r)+1 > r$) donc A_2 n'est pas majoré
2.3. n'étant pas majoré, A_2 n'est pas borné
2.4. 0 est un minorant de A_2 qui appartient à A_2 donc 0 est le minimum de A_2
2.5. comme A_2 n'admet pas de majorant, il n'admet pas de maximum
2.6. on en déduit que 0 est la borne inférieure de A_2
2.7. on en déduit que A_2 n'a pas de borne supérieure

$A_3 = \mathbb{Z}$

3.1. A_3 n'admet pas de minorant réel (en effet, si $r \in \mathbb{R}$ est un minorant de A_3, alors $E(r)-1 \in A_3$ et $E(r)-1 < r$) donc A_3 n'est pas minoré
3.2. A_3 n'admet pas de majorant réel (en effet, si $r \in \mathbb{R}$ est un majorant de A_3, alors $E(r)+1 \in A_3$ et $E(r)+1 > r$) donc A_3 n'est pas majoré
3.3. n'étant pas majoré, A_3 n'est pas borné
3.4. comme A_3 n'admet pas de minorant, il n'admet pas de minimum
3.5. comme A_3 n'admet pas de majorant, il n'admet pas de maximum
3.6. on en déduit que A_3 n'a pas de borne inférieure
3.7. on en déduit que A_3 n'a pas de borne supérieure

$A_4 = \{3+7q \ : \ q \in \mathbb{N}\}$

4.1. $\forall x \in A_4$, $x \geq 3$ donc 3 est un minorant de A_4 et A_4 est minoré
4.2. A_4 n'admet pas de majorant donc A_4 n'est pas majoré
4.3. n'étant pas majoré, A_4 n'est pas borné
4.4. 3 est un minorant de A_4 qui appartient à A_4 (il suffit de prendre $q=0$) donc 3 est le minimum de A_4
4.5. comme A_4 n'admet pas de majorant, il n'admet pas de maximum
4.6. on en déduit que 3 est la borne inférieure de A_4
4.7. on en déduit que A_4 n'a pas de borne supérieure

$A_5 = \{3-7q \ : \ q \in \mathbb{N}\}$

5.1. A_5 n'admet pas de minorant donc A_5 n'est pas minoré
5.2. $\forall x \in A_5$, $x \leq 3$ donc 3 est un majorant de A_5 et A_5 est majoré
5.3. n'étant pas minoré, A_5 n'est pas borné
5.4. comme A_5 n'admet pas de minorant, il n'admet pas de minimum
5.5. 3 est un majorant de A_5 qui appartient à A_5 (il suffit de prendre $q=0$) donc 3 est le maximum de A_5
5.6. on en déduit que A_5 n'a pas de borne inférieure
5.7. on en déduit que 3 est la borne supérieure de A_5

$A_6 = \{p/3^n \ : \ p,n \in \mathbb{N}\}$

6.1. $\forall x \in A_6$, $x \geq 0$ donc 0 est un minorant de A_6 et A_6 est minoré
6.2. comme $A_2 \subset A_6$, A_6 n'est pas majoré
6.3. n'étant pas majoré, A_6 n'est pas borné
6.4. 0 est un minorant de A_6 qui appartient à A_6 (avec $p=n=0$) donc 0 est le minimum de A_6
6.5. comme A_6 n'admet pas de majorant, il n'admet pas de maximum
6.6. on en déduit que 0 est la borne inférieure de A_6
6.7. on en déduit que A_6 n'a pas de borne supérieure

$A_7 = \{p/3^n \ : \ p,n \in \mathbb{N}^*\}$

7.1. $\forall x \in A_7$, $x \geq 0$ donc 0 est un minorant de A_7 et A_7 est minoré
7.2. A_7 n'admet pas de majorant donc A_7 n'est pas majoré
7.3. n'étant pas majoré, A_7 n'est pas borné

7.4. 0 est le plus grand des minorants de A_7 mais il n'appartient pas à A_7 donc A_7 n'a pas de minimum
7.5. comme A_7 n'admet pas de majorant, il n'admet pas de maximum
7.6. on en déduit que 0 est la borne inférieure de A_7
7.7. on en déduit que A_7 n'a pas de borne supérieure

$A_8 = \mathbb{R}$
8.1. il n'est pas minoré
8.2. il n'est pas majoré
8.3. comme il n'est pas minoré, il n'est pas borné
8.4. comme il n'est pas minoré, il n'a pas de minimum
8.5. comme il n'est pas majoré, il n'a pas de maximum
8.6. comme il n'est pas minoré, il n'a pas de borne inférieure
8.7. comme il n'est pas majoré, il n'a pas de borne supérieure

$A_9 = \,]5,6]$
9.1. $\forall x \in A_9$, $x > 5$ donc 5 est un minorant de A_9 et A_9 est minoré
9.2. $\forall x \in A_9$, $x \le 6$ donc 6 est un majorant de A_9 et A_9 est majoré
9.3. étant minoré et majoré, A_9 est borné
9.4. 5 est le plus grand des minorants de A_9 mais il n'appartient pas à A_9 donc A_9 n'a pas de minimum (en effet, $\forall x \in A_9$, $(5+x)/2 \in A_9$ et $(5+x)/2 < x$; de plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $5+1/n \not\in A_9$ et $5 < x < 5+1/n$)
9.5. 6 est un majorants de A_9 qui appartient à A_9 donc 6 est le maximum de A_9
9.6. on en déduit que 5 est la borne inférieure de A_9
9.7. on en déduit que 6 est la borne supérieure de A_9

Exercice 3.40

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 + x^2$. Déterminer l'image directe et réciproque par f des ensembles suivants

$A = [0,1]$ $\qquad B =]-1,4[$ $\qquad C = [0,+\infty[$ $\qquad D =]-\infty,5]$

Correction

	f	f^{-1}
$A = [0,1]$	$[1,2]$	$\{0\}$
$B =]-1,4[$	$[1,17[$	$]-\sqrt{3},\sqrt{3}[$
$C = [0,+\infty[$	$[1,+\infty[$	$\mathbb{R}$
$D =]-\infty,5]$	$[1,+\infty[$	$[-2,2]$

Exercice 3.41

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Soient $A := [-2,1]$ et $B := [-1,4]$.

1. Comparer $f(A\cap B)$ et $f(A)\cap f(B)$.
2. Comparer $f(A\cup B)$ et $f(A)\cup f(B)$.
3. Calculer $f^{-1}\big(f(A)\big)$ et $f\big(f^{-1}(A)\big)$ puis comparer ces deux ensembles et A.

Correction

On a $A := [-2,1]$, $B := [-1,4]$, $f(A) = [0,4]$ et $f(B) = [0,16]$.

1. $A\cap B = [-1,1]$, $f(A\cap B) = [0,1]$ et $f(A)\cap f(B) = [0,4]$ donc $f(A\cap B) \subset f(A)\cap f(B)$.
2. $A\cup B = [-2,4]$, $f(A\cup B) = [0,16]$ et $f(A)\cup f(B) = [0,16]$ donc $f(A\cup B) = f(A)\cap f(B)$.
3. $f^{-1}\big(f(A)\big) = f^{-1}([0,4]) = [-2,2]$ donc $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$
   $f^{-1}(A) = [-1,1]$, $f\big(f^{-1}(A)\big) = f([-1,1]) = [0,1]$ donc $f\big(f^{-1}(A)\big) \subset f(A)$.

Exercice 3.42

Soit $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = 2x^2+1$. Soit $A = [-2,1]$. Trouver

a) $f(A)$, $\qquad$ b) $f^{-1}\big(f(A)\big)$, $\qquad$ c) $\sup_A f$, $\qquad$ d) $\inf_A f$.

Correction

a) $f(A) = [1;9]$,
b) $f^{-1}\big(f(A)\big) = [-2;2]$ et on remarque que $[-2,1] \subset [-2;2]$,
c) $\sup_A f = 9 = \max_A f$,
d) $\inf_A f = 1 = \min_A f$.

Exercice 3.43

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = 1 - 2x^2$. Soit $A = [-2,1]$. Trouver

a) $f(A)$,
b) $f^{-1}\big(f(A)\big)$,
c) $\sup_A f$,
d) $\inf_A f$.

Correction

a) $f(A) = [-7;1]$,
b) $f^{-1}\big(f(A)\big) = [-2;2]$ et on remarque que $[-2,1] \subset [-2;2]$,
c) $\sup_A f = 1 = \max_A f$,
d) $\inf_A f = -7 = \min_A f$.

Avancé

Exercice 3.44

Soit E, F deux ensembles non vides et f une application de E dans F.

1. Soit $\{A_i\}_{i\in I}$ une famille de parties de E. Montrer que

$$f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f(A_i) \qquad \text{et} \qquad f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i).$$

2. Soit $\{B_j\}_{j\in J}$ une famille de parties de F. Montrer que

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{j\in J} B_j\Big) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j) \qquad \text{et} \qquad f^{-1}\Big(\bigcap_{j\in J} B_j\Big) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j).$$

Correction

1. Soit $\{A_i\}_{i\in I}$ une famille de parties de E.
   1.1. Prouvons que $f\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) \subset \bigcup_{i\in I} f(A_i)$: soit $y \in f\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big)$, alors il existe $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ tel que $f(x) = y$, cela implique qu'il existe un indice $i \in I$ tel que $x \in A_i$inipage et $f(x) = y$, mais alors $y \in f(A_i)$ et donc $y \in \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.
   1.2. Prouvons que $\bigcup_{i\in I} f(A_i) \subset f\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big)$: soit $y \in \bigcup_{i\in I} f(A_i)$, alors il existe $i \in I$, $y \in f(A_i)$, cela implique qu'il existe $x \in A_i$ tel que $y = f(x)$, mais alors $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ et donc $y \in f\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big)$.
   1.3. Prouvons que $f\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$: soit $y \in f\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big)$, alors il existe $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ tel que $f(x) = y$, cela implique que $x \in A_i$ pour tout indice $i \in I$ et $f(x) = y$, mais alors $y \in f(A_i)$ pour tout indice $i \in I$ et donc $y \in \bigcap_{i\in I} f(A_i)$.
2. Soit $\{B_j\}_{j\in J}$ une famille de parties de F.
   2.1. Prouvons que $f^{-1}\big(\bigcup_{j\in J} B_j\big) \subset \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$: soit $x \in f^{-1}\big(\bigcup_{j\in J} B_j\big)$, alors il existe $y \in \bigcup_{j\in J} B_j$ tel que $f^{-1}(x) = y$, cela implique qu'il existe un indice $j \in J$ tel que $y \in B_j$ et $y = f^{-1}(x)$, c'est-à-dire qu'il existe un indice $j \in J$ tel que $x \in f^{-1}(B_j)$, mais alors $x \in \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.
   2.2. Prouvons que $\bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j) \subset f^{-1}\big(\bigcup_{j\in J} B_j\big)$: soit $x \in \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$, alors il existe un indice $j \in J$ tel que $x \in f^{-1}(B_j)$, c'est-à-dire qu'il existe $y \in B_j$ tel que $f^{-1}(y) = x$, cela implique que $y \in \bigcup_{j\in J} B_j$ et $f^{-1}(y) = x$, mais alors $x \in f^{-1}\big(\bigcup_{j\in J} B_j\big)$.
   2.3. Prouvons que $f^{-1}\big(\bigcap_{j\in J} B_j\big) \subset \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$: soit $x \in f^{-1}\big(\bigcap_{j\in J} B_j\big)$, alors il existe $y \in \bigcap_{j\in J} B_j$ tel que $f^{-1}(y) = x$, c'est-à-dire que pour tout $j \in J$, $y \in B_j$ et $f^{-1}(y) = x$, cela implique que pour tout $j \in J$, $x \in f^{-1}(B_j)$, mais alors $x \in \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.
   2.4. Prouvons que $\bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j) \subset f^{-1}\big(\bigcap_{j\in J} B_j\big)$: soit $x \in \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$, alors pour tout $j \in J$, $x \in f^{-1}(B_j)$, c'est-à-dire que pour tout $j \in J$, il existe $y \in B_j$ tel que $f^{-1}(y) = x$, cela implique que pour tout $y \in \bigcap_{j\in J} B_j$ et $f^{-1}(y) = x$, mais alors $x \in \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.

Exercice 3.45

Soient E, F deux ensembles non vides et f une application de E dans F. Montrer que

1. $\forall A \subset E$, $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$;
2. $\forall B \subset F$, $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$;
3. f est injective ssi $\forall A \subset E$, $f^{-1}\big(f(A)\big) = A$;
4. f est surjective ssi $\forall B \subset F$, $f\big(f^{-1}(B)\big) = B$.

Correction

1. Image directe $f(A) = \{ y \in F \mid \exists x \in \mathscr{D}_f,\ y = f(x) \}$, *i.e.* l'ensemble des $f(x) \in F$ pour x parcourant A;
2. Image inverse (réciproque) $f^{-1}(B) = \{ x \in \mathscr{D}_f \mid f(x) \in B \}$. L'image réciproque se note $f^{-1}(B)$ bien que f^{-1} ne soit pas définie en générale. Cependant, si f est bijective, le symbole f^{-1} a deux sens : il représente d'abord l'image réciproque I de B par f et aussi l'image directe I' de B par f^{-1}. Heureusement, $I = I'$.

On a

1. Soit $x_0 \in A$. Alors il existe un et un seul $y_0 \in F$ tel que $y_0 = f(x_0)$ et, par définition de $f(A)$, ce $y_0 \in f(A)$. De plus, il existe au moins un antécédent de ce y_0 par f, à savoir x_0. Donc $x_0 \in f^{-1}\big(f(A)\big)$, ce qui prouve que $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$.
2. $x_0 \in f\big(f^{-1}(B)\big)$ ssi $\exists\, z \in f^{-1}(B)$ tel que $x_0 = f(z)$ et $z \in f^{-1}(B)$ ssi $f(z) \in B$. Ceci prouve que $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$.
3. Si f est injective y_0 a comme unique antécédent x_0 et on a $A = f^{-1}\big(f(A)\big)$.
4. f est surjective ssi $\forall B$, $f\big(f^{-1}(B)\big) = B$.
   - ⋆ Supposons f surjective. On a toujours $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$ Si $B = \emptyset$ alors $f\big(f^{-1}(B)\big) = \emptyset$. Soit donc $B \neq \emptyset$. Pour tout $b \in B$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = b$ car f est surjective. Donc $f(x) \in B$ alors $x \in f^{-1}(B)$ et $b = f(x) \in f\big(f^{-1}(B)\big)$; on a bien $f\big(f^{-1}(B)\big) = B$ pour tout $B \in \mathscr{P}(F)$.
   - ⋆ Supposons que pour tout $B \in \mathscr{P}(F)$, $f\big(f^{-1}(B)\big) = B$. Pour tout $b \in F$ on a $f\big(f^{-1}(\{b\})\big) = \{b\}$ donc $f\big(f^{-1}(\{b\})\big) \neq \emptyset$ ce qui prouve que f est surjective.

4

Suites numériques et limites

Suites arithmétiques et géométriques

Exercice 4.1

Le prix de vente d'une voiture commercialisée initialement en 1995 diminue tous les ans de la même valeur. En 2002, elle est affichée au prix de 13 200 €. On relève en 2006 un prix de vente de 11 600 €. On note v_n le prix de vente de ce modèle l'année $(1995 + n)$ et on considère la suite (v_n).

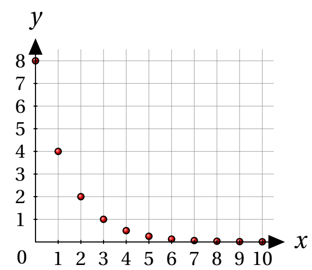
1. Donner la nature de la suite (v_n) et en déterminer la raison.
2. Quel était le prix initial de vente en 1995 ?
3. À partir de quel année sera-t-il possible d'acquérir la voiture pour moins de 10 000 € ?
4. De début 1999 à fin 2010, un concessionnaire achète chaque année dix de ces modèles. Déterminer la somme totale dépensée pour acheter l'ensemble de ces véhicules.

Correction

1. Comme le prix de vente diminue tous les ans de la même valeur, la suite (v_n) est arithmétique $v_{n+1} = v_n + r = v_0 + nr$. On a $v_{11} = 11600$ et $v_7 = 13200$ donc la raison de la suite est $r = \frac{v_{11}-v_7}{11-7} = \frac{11600-13200}{4} = -400$.
2. $v_0 = v_{n+1} - nr$ donc $v_0 = 13200 - 7 \times (-400) = 16000$ €
3. $v_n < 10000$ ssi $v_0 + (n-1)r < 10000$ ssi $n > \frac{10000-16000}{-400} = \frac{-6000}{-400} = 15$: à partir de 2010 il sera possible d'acquérir la voiture pour moins de 10 000 €.
4. $10\,(v_4 + v_5 + \cdots + v_{15}) = 10\left[\sum_{k=0}^{15} v_k - \sum_{k=0}^{3} v_k\right] = 10\left[\left((15+1)\,v_0 + r\frac{15(15+1)}{2}\right) - \left((3+1)\,v_0 + r\frac{3(3+1)}{2}\right)\right] = 1464000$ €

Exercice 4.2 (Lecture graphique, suite géométrique)

Soit (u_n) la suite représentée sur la figure ci-contre.



1. Déterminer graphiquement u_0, u_1, et u_2.
2. En supposant que la nature de la suite est géométrique, en préciser la raison.
3. Exprimer u_n en fonction de n.
4. En déduire la valeur de u_{10}.
5. Calculer $S_{10} = u_0 + u_1 + \ldots + u_{10}$.

Correction

1. $u_0 = 8$, $u_1 = 4$, et $u_2 = 2$.
2. Une suite est géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ si $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_1}{u_0} = \frac{1}{2}$, on en déduit que la suite est géométrique de raison $1/2$, *i.e.* $u_{n+1} = u_n/2$.
3. $u_n = 2^{-1}u_{n-1} = 2^{-2}u_{n-2} = \cdots = 2^{-n}u_0 = 8 \times 2^{-n} = 2^{3-n}$.
4. $u_{10} = 2^{3-10} = 1/2^7 \simeq 0.0078125$.
5. $S_{10} = \sum_{n=0}^{10} u_n = 8 \times \frac{1-2^{-11}}{1-2^{-1}} = 15.9921875$.

Exercice 4.3

Au niveau de la mer, la pression atmosphérique est de 1013 hPa (hectopascals). On admet que la pression atmosphérique diminue de 1.25% à chaque élévation de 100 m. On note pour les besoins de l'exercice P_n la pression en hectopascal à $100n$ mètres d'altitude et on considère la suite numérique (P_n).

1. Déterminer les pressions P_0, P_1, et P_2 aux altitudes respectivement 0 m, 100 m et 200 m.

2. Exprimer la pression P_{n+1} à l'altitude $100n+100$ mètres en fonction de la pression P_n à l'altitude $100n$ mètres. En déduire la nature de la suite et sa raison.
3. Donner le terme général de la suite (P_n).
4. Calculer la pression atmosphérique à 3200 m d'altitude.
5. Déterminer à partir de quelle altitude, à 100 m près, la pression atmosphérique devient inférieure à 600 hPa. Justifier par un encadrement.

Correction

1. $P_0 = 1013$, $P_1 = (1-1.25\%)P_0 = \frac{98.75}{100}P_0 = 1000.3375$ et $P_2 = 987.83328125$.
2. $P_{n+1} = \frac{98.75}{100}P_n$: il s'agit d'une suite géométrique de raison $q = 0.9875 = 98.75\%$.
3. $P_n = P_0 q^n = 1013 \times (0.9875)^n$.
4. La pression atmosphérique à 3200 m d'altitude correspond à $P_{32} = 1013 \times (0.9875)^{32} = 677.324496629$.
5. $P_n < 600$ ssi $1013 \times (0.9875)^n < 600$ ssi $(0.9875)^n < \frac{600}{1013}$ ssi $n > \log_{0.9875}(\frac{600}{1013}) = \ln(\frac{600}{1013})/\ln(0.9875) \simeq 41$. En effet, $P_{41} = 604.826375239$ et $P_{42} = 597.266045549$.

Calculs de limites

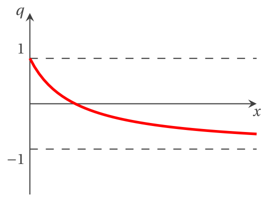
Exercice 4.4 (Suite géométrique)

Étudier la convergence de la suite

$$\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^n, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Correction

Il s'agit d'une suite géométrique de raison $q(x) = \frac{1-x}{1+x}$, avec $x = a^2 \geq 0$. On trace d'abord la fonction q pour $x \in \mathbb{R}^+$ et on la compare aux droites d'équation $q = \pm 1$.



- ⋆ u_n ne converge pas et ne possède pas de limite si $q(a) < -1$, c'est-à-dire pour aucun a réel.
- ⋆ u_n ne converge pas et possède deux valeurs d'adhérence 1 et -1 si $q(a) = -1$, c'est-à-dire pour aucun a réel.
- ⋆ u_n converge vers 0 si $-1 < q(a) < 1$, c'est-à-dire pour tout $a \neq 0$.
- ⋆ u_n est constante et converge vers 1 si $q(a) = 1$, c'est-à-dire si $a = 0$.
- ⋆ u_n est divergente et possède une limite égale à $+\infty$ si $q(a) > 1$, c'est-à-dire pour aucun a réel.

En résumé :

$$\lim_n u_n = \begin{cases} 0, & \text{si } a \neq 0, \\ 1, & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

Exercice 4.5

Étudier la limite quand n tend vers $+\infty$ des suites de terme général :

a) $\dfrac{1}{n} + n^2 + 1$ b) $\dfrac{2n}{n^3+1}$ c) $\dfrac{n^2-1}{n+1}$ d) $\dfrac{n-(-1)^{n+1}}{n+(-1)^{n+1}}$

e) $\dfrac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}}$ f) $\sqrt{n^5+3n}-n$ g) $n-\sqrt{n^3-3n}$ h) $n-\sqrt{n^2-3n}$

i) $n^2-\sqrt{n^4-2n}$ j) $n^2-\sqrt{n^4-2n^2}$ k) $\dfrac{\sin(n)+2}{n+3}$ l) $\dfrac{\cos^5(\sqrt{n})}{n^2}$

m) $\dfrac{n^3+5n}{5n^3+\cos(n)+\frac{1}{n^2}}$ n) $\dfrac{(-1)^n \arctan(n)}{n}$ o) $\left(1+\dfrac{\pi}{n}\right)^n$ p) $\left(1-\dfrac{e}{n}\right)^n$

Correction

a) $\dfrac{1}{n}+n^2+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$,

b) $\dfrac{2n}{n^3+1}=\dfrac{2}{n^2+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,

c) $\dfrac{n^2-1}{n+1}=(n-1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$,

d) $\dfrac{n-(-1)^{n+1}}{n+(-1)^{n+1}}=\dfrac{1-\frac{(-1)^{n+1}}{n}}{1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$,

e) $\dfrac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}}=\dfrac{2+\frac{(-1)^n}{n}}{5+\frac{(-1)^{n+1}}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{5}$

f) $\sqrt{n^5+3n}-n=n^{5/2}\left(\sqrt{1+\frac{3}{n^4}}-\frac{1}{n^{3/2}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$,

g) $n-\sqrt{n^3-3n}=n^{3/2}\left(\frac{1}{n^{1/2}}-\sqrt{1-\frac{3}{n^2}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$,

h) $\lim\limits_{n\to+\infty} n-\sqrt{n^2-3n}=\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1-\sqrt{1-\frac{3}{n}}\right)=$F.I. et $n-\sqrt{n^2-3n}=\dfrac{3n}{n\left(1+\sqrt{1-\frac{3}{n}}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{3}{2}$,

i) $n^2-\sqrt{n^4-2n}=\frac{n^4-(n^4-2n)}{n^2+\sqrt{n^4-2n}}=\frac{2n}{n^2\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{n^3}}\right)}=\frac{2}{n\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{n^3}}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,

j) $n^2-\sqrt{n^4-2n^2}=\frac{n^4-(n^4-2n^2)}{n^2+\sqrt{n^4-2n^2}}=\frac{2n^2}{n^2\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{n^2}}\right)}=\frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{2}{n^2}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

k) $\dfrac{\sin(n)+2}{n+3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^+$ (théorème d'encadrement),

l) $\dfrac{\cos^5(\sqrt{n})}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (théorème d'encadrement),

m) $\dfrac{n^3+5n}{5n^3+\cos(n)+\frac{1}{n^2}}=\dfrac{1+\frac{5}{n^2}}{5+\frac{\cos(n)}{n^3}+\frac{1}{n^5}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{5}$ (théorème d'encadrement),

n) $\frac{(-1)^n\arctan(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (théorème d'encadrement car $-\frac{\pi}{2}<\arctan(n)<\frac{\pi}{2}$)

o) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{\pi}{n}\right)^n=e^\pi$,

p) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{e}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{-e}{n}\right)^n=e^{-e}$,

Exercice 4.6

Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n},\qquad \lim_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right),\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(n)}{n},\qquad \lim_{n\to+\infty} n\sin(n).$$

Correction

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)=0\times 0=0,$$

$$\lim_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right)=1,\qquad \text{(limite fondamentale)}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(n)}{n}=0,\qquad \text{(théorème d'encadrement)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n\sin(n)\ \text{n'existe pas}$$

En effet, considérons les deux sous-suites $n=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ et $n=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ ($n\to+\infty$ ssi $k\to+\infty$) :

$$\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\xrightarrow[k\to+\infty]{}+\infty,$$

$$\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)=-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\xrightarrow[k\to+\infty]{}-\infty.$$

Exercice 4.7

Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

a) $\lim_{n\to+\infty} n^2\left(1-\cos\left(\frac{2}{n}\right)\right)$, b) $\lim_{n\to+\infty} n^2\left(1-\cos\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$, c) $\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\cos\left(\frac{2}{n}\right)\right)$,

d) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$, e) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n$, f) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\sqrt{n}}$,

g) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^n$, h) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{4n}$,

Correction

a) $\lim_{n\to+\infty} n^2\left(1-\cos\left(\frac{2}{n}\right)\right)=\lim_{n\to+\infty} 4\left(\frac{n}{2}\right)^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{n/2}\right)\right)=2$,

b) $\lim_{n\to+\infty} n^2\left(1-\cos\frac{2}{\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to+\infty}(4n)n\left(1-\cos\frac{2}{\sqrt{n}}\right)=+\infty$,

c) $\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\cos\left(\frac{2}{n}\right)\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{n}n^2\left(1-\cos\left(\frac{2}{n}\right)\right)=0$,

d) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\sqrt{n}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}}=1$,

e) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^n$ n'existe pas car la suite extraite constituée par les termes d'indices paire converge vers e et la suite extraite constituée par les termes d'indices impaire converge vers e^{-1},

f) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{4n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n/3}\right)^{n/3}\right)^{4\times 3}=e^{12}$,

Exercice 4.8

Calculer, si elles existent, les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suivantes, en supposant que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ on a :

a) $u_n>\ln n$ *b)* $\frac{1}{n+1}\le u_n\le\frac{1}{n}$ *c)* $u_0<1$, $(u_n)_n\nearrow$ et $u_n<1+\frac{1}{n}$ *d)* $u_n=\sqrt[n]{n}$

e) $u_n=\ln n+\sin(n)$ *f)* $u_n=\sin\frac{n\pi}{3}$ *g)* $u_n=\frac{n}{e}+\frac{1}{e^n}$ *h)* $u_n=\frac{n}{n+1}\ln n$

i) $u_n=\frac{n^2}{n!}$ *j)* $u_n=\frac{(2n)!}{n!}$ *k)* $u_n=\frac{n\sin(n)}{n^2+1}$ *l)* $u_n=\frac{n+(-1)^n}{3n-(-1)^n}$

m) $u_n=\frac{n^2}{n^2+1}$ *n)* $u_n=(-1)^n\frac{n^2}{n^2+1}$ *o)* $u_n=\sqrt{3n+1}-\sqrt{2n+1}$ *p)* $u_n=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{n}\right)$

Correction

a) $u_n\to+\infty$ car $\ln n\to+\infty$ (théorème d'encadrement)

b) $u_n\to 1$ car $\frac{1}{n+1}\to 1$ et $\frac{1}{n}\le u_n\le$ (théorème d'encadrement)

c) $u_n\to\ell\le 1$ car u_n est monotone croissante et majorée par 2 donc $\ell\le\lim_n(1+\frac{1}{n})=1$

d) $u_n=\sqrt[n]{n}=\exp(\frac{\ln n}{n})\to\exp(0)=1$

e) $u_n=\ln(n)+\sin(n)\to+\infty$ car $(\ln(n)-1)\le u_n\le(\ln(n)+1)$ et $(\ln(n)\pm 1)\to+\infty$ (théorème d'encadrement)

f) $u_n=\sin\frac{n\pi}{3}$ n'existe pas car la suite extraite $u_{3n}=\sin(n\pi)=0$ et la suite extraite $u_{6n+1}=\sin(2n\pi+\pi/3)=\sqrt{3}/2$

g) $u_n\to+\infty$

h) $u_n=\frac{\ln n}{1+\frac{1}{n}}\to+\infty$

i) $u_n>0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)^2n!}{(n+1)!n^2}=\frac{n+1}{n^2}<1$ pour $n>2$; comme $u_n\searrow$ et $u_n>0$ alors $u_n\to\ell\ge 0$. Sinon on peut utiliser directement le critère du rapport : $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+1}{n^2}\to 0$ donc $u_n\to 0$.

j) $u_n=(2n)(2n-1)\cdots(2n-n+1)\to+\infty$

k) $u_n\to 0$ car $\frac{-n}{n^2+1}\le\frac{n\sin(n)}{n^2+1}\le\frac{n}{n^2+1}$ et $\pm\frac{n}{n^2+1}\to 0$ (théorème d'encadrement)

l) $u_n\to\frac{1}{3}$ car $\frac{n-1}{3n+1}\le\frac{n+(-1)^n}{3n-(-1)^n}\le\frac{n+1}{3n-1}$ et $\lim_n\frac{n-1}{3n+1}=\lim_n\frac{n+1}{3n-1}=\frac{1}{3}$

m) $u_n\to 1$

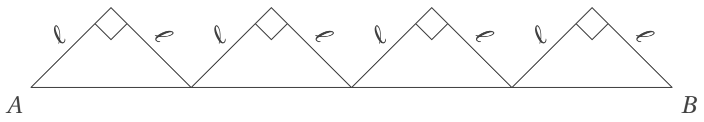
n) Cette suite ne converge pas car la sous-suite u_{2n} tend vers 1 tandis que la sous-suite u_{2n+1} tend vers -1

o) $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{3n+1}-\sqrt{2n+1})\frac{\sqrt{3n+1}+\sqrt{2n+1}}{\sqrt{3n+1}+\sqrt{2n+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(3n+1)-(2n+1)}{\sqrt{3n+1}+\sqrt{2n+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{3n+1}{n^2}}+\sqrt{\frac{2n+1}{n^2}}}=+\infty$

p) $\lim_{n\to+\infty}\sin\left(\pi+\frac{\pi}{n}\right)=0$

Exercice 4.9

Le segment AB de longueur 1 est subdivisé en n segments égaux et sur chacun d'eux on construit un triangle rectangle isocèle comme indiqué sur la figure ci-dessous. On obtient une ligne de segments de longueur $L = 2n\ell$. Montrer que L ne tend pas vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$ même si elle tend à se confondre avec le segment AB. Vers quelle valeur tend-elle ?



Correction

Le segment AB de longueur 1 est subdivisé en n segments égaux de longueur $\frac{1}{n}$ donc $\ell = \frac{1}{\sqrt{2}n}$. Alors $L(n) = 2n\ell(n) = \sqrt{2}$ pour tout n et $\lim_{n\to+\infty} L(n) = \sqrt{2}$.

Suites récurrentes

Exercice 4.10 (Suite récurrente)

Étudier la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 & \text{donné,} \\ u_{n+1} = \varphi(u_n) & \forall n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

avec

a) $u_0 > 1$ et $u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n}$ b) $1 \le u_0 < 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ c) $u_0 > 2$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 1$

Correction

a) **Suite bornée.** Par récurrence :
  - ⋆ $u_0 > 1$;
  - ⋆ soit $u_n > 1$, alors $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n} > 2 - 1 = 1$.

Monotonie. Puisque $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = 2 - \frac{1}{u_n} - u_n = -\frac{(u_n-1)^2}{u_n} < 0$, autrement dit la suite u_n est monotone décroissante.

Convergence. Étant une suite monotone décroissante vérifiant $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors elle converge et $\lim u_n = \ell \ge 1$.

Limite. En passant à la limite dans la définition, on a $\ell = 2 - \frac{1}{\ell}$ d'où $\ell = 1$.

b) **Suite bornée.** Par récurrence :
  - ⋆ on a bien $1 \le u_0 < 2$;
  - ⋆ montrons que, pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, si $1 < u_k < 2$ alors $1 < u_{k+1} < 2$:

$$1 < u_k < 2 \implies 3 < 2 + u_k < 4 \implies \sqrt{3} < \sqrt{2 + u_k} < 2 \implies 1 < \sqrt{2 + u_k} < 2 \implies 1 < u_{k+1} < 2.$$

Monotonie. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2 + u_n} - u_n = \frac{2 + u_n - u_n^2}{\sqrt{2 + u_n} + u_n} = -\frac{(u_n + 1)(u_n - 2)}{\sqrt{2 + u_n} + u_n} > 0$$

car $1 < u_n < 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, autrement dit la suite u_n est monotone croissante.

Convergence. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite monotone croissante et majorée. Elle est donc convergente. Notons ℓ sa limite avec $\ell \in]1;2]$.

Candidates limites. La limite vérifie $\ell = \sqrt{2 + \ell}$ ce qui implique $(\ell + 1)(\ell - 2) = 0$. Comme $\ell \in]1;2]$ on a donc $\ell = 2$.

c) **Suite bornée.** Par récurrence :
  - ⋆ $u_0 > 2$;
  - ⋆ soit $u_n > 2$, alors $u_{n+1} = u_n^2 + 1 > 5$.

Candidates limites. Soit $\ell = \lim u_n$ avec $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, en passant à la limite dans la définition, on a $\ell = \ell^2 + 1$ qui n'a pas de solution réelle : la suite est alors divergente.

Monotonie. Puisque $u_n > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n + 1 > u_n^2 - 2u_n + 1 = (u_n - 1)^2 > 0$, autrement dit la suite u_n est monotone croissante.

Convergence. Étant une suite monotone croissante qui diverge, on conclut que $\lim u_n = +\infty$

Exercice 4.11 (Suite récurrente)

Soit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \dfrac{a+1+u_n}{a}$. On pose $v_n := u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $s_n := \sum_{k=0}^{k=n-1} v_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Exprimer v_n en fonction de v_{n-1}. En déduire qu'il existe une valeur a_0 de a (à préciser) pour laquelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante.
2. Montrer que pour tout $a \neq a_0$, la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
3. Calculer $\lim_n s_n$ en fonction des valeurs de a.
4. Montrer que $u_n = 1 + s_n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. En déduire $\lim_n u_n$ en fonction des valeurs de a.

Correction

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
$$v_n = u_{n+1} - u_n = \frac{a+1+u_n}{a} - \frac{a+1+u_{n-1}}{a} = \frac{u_n - u_{n-1}}{a} = \frac{v_{n-1}}{a}.$$
On trouve la suite
$$\begin{cases} v_0 = u_1 - u_0 = \frac{a+1+1}{a} - 1 = \frac{2}{a}, \\ v_{n+1} = \frac{v_n}{a}. \end{cases}$$
On en déduit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante égale à 2 lorsque $a = 1 =: a_0$.
2. Pour tout $a \neq a_0$
$$v_n = \frac{v_{n-1}}{a} = \frac{v_{n-2}}{a^2} = \cdots = \frac{v_0}{a^n} = 2a^{-n}$$
donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $1/a$.
3. On sait que si $w_{n+1} = q w_n$ pour tout $q \in \mathbb{R}^*$, alors $w_n = w_0 q^n$ et
$$\sum_{k=0}^{n} w_k = w_0 \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} w_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, & \text{si } q \neq 1 \\ w_0(n+1) & \text{si } q = 1 \end{cases}$$
donc ici
$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k = v_0 \sum_{k=0}^{n-1} a^{-k} = \begin{cases} \frac{2}{a}\frac{1-a^{-n}}{1-a^{-1}}, & \text{si } a \neq 1 \\ 2n, & \text{si } a = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{2}{a^n}\frac{a^n-1}{a-1}, & \text{si } a \neq 1, \\ 2n, & \text{si } a = 1. \end{cases}$$
Par conséquent
$$\lim_n s_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } a = 1, \\ \frac{2}{a-1} & \text{si } a > 1, \\ +\infty & \text{si } 0 < a < 1. \end{cases}$$
4. On a
$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k = v_0 \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k = u_1 - u_0 + u_2 - u_1 + \cdots + u_n - u_{n-1} = u_n - u_0 = u_n - 1$$
donc $u_n = 1 + s_n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Alors
$$\lim_n u_n = 1 + \lim_n s_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } a = 1, \\ \frac{a+1}{a-1} & \text{si } a > 1, \\ +\infty & \text{si } 0 < a < 1. \end{cases}$$

Exercice 4.12

On sait que $\sqrt{a}$ désigne le nombre positif dont le carré vaut a. Cette écriture n'as de sens que si a est positif. Pourtant on peut donner un sens au nombre b qui s'écrit
$$b = \sqrt{-\frac{1}{4} + \sqrt{-\frac{1}{4} + \sqrt{-\frac{1}{4} + \sqrt{-\frac{1}{4} + \ldots}}}}.$$
Lequel et que vaut b?

Correction
Introduisons la suite récurrente de premier terme $u_0 > \frac{1}{4}$ telle que $u_{n+1} = \sqrt{u_n - \frac{1}{4}}$.

Suite minorée. On montre par récurrence que $u_n > \frac{1}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: on a bien $u_0 > \frac{1}{4}$; montrons que si $u_k > \frac{1}{4}$ alors $u_{k+1} > \frac{1}{4}$. On a

$$u_{k+1} > \frac{1}{4} \iff \sqrt{u_k - \frac{1}{4}} > -\frac{1}{4} \iff u_k \geq \frac{1}{4}.$$

Monotonie. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n - \frac{1}{4}} - u_n = \frac{u_n - \frac{1}{4} - u_n^2}{\sqrt{u_n - \frac{1}{4}} + u_n} = \frac{-\frac{1}{4}(2u_n - 1)^2}{\sqrt{u_n - \frac{1}{4}} + u_n} \leq 0$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Convergence. (u_n) est une suite monotone décroissante et minorée. Elle est donc convergente et b est sa limite.

Limite. La suite (u_{n+1}) tend vers b et la suite $f(u_n)$ tend vers $f(b)$. La limite vérifie donc

$$b = \sqrt{b - \frac{1}{4}}.$$

On a donc $b = \frac{1}{2}$.

Avancé

Exercice 4.13
Donner l'exemple
1. d'une suite bornée et sans limite ;
2. d'une suite non bornée ayant une limite ;
3. d'une suite non bornée et sans limite ;
4. de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que (u_n) converge et (v_n) diverge et $(u_n v_n)$ diverge ;
5. de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que (u_n) converge et (v_n) diverge et $(u_n v_n)$ converge ;
6. de deux suites bornées $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que (u_n) ne converge pas, (v_n) ne converge pas, mais $(u_n v_n)$ converge.

Correction
1. $u_n = (-1)^n$, $u_n = \sin(n)$; 2. $u_n = n$, $u_n = n\sin(n)$; 3. $u_n = (-1)^n n \sin(n)$; 4. $u_n = 1/n$ et $v_n = n^2$; $u_n = n^\alpha$ avec $\alpha < 0$, $v_n = n^\beta$ avec $\beta > 0$ et $\alpha + \beta > 0$; 5. $u_n = 1/n^2$ et $v_n = n$; $u_n = n^\alpha$ avec $\alpha < 0$, $v_n = n^\beta$ avec $\beta > 0$ et $\alpha + \beta < 0$; 6. $u_n = v_n = (-1)^n$.

Exercice 4.14
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. Pour chacune des assertions (1) à (4) suivantes, associer celle des phrases (a) à (d) qui signifie la même chose (On donnera les correspondances sans justifier).

(1) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{R}, u_n \geq M$

(2) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq M$

(3) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall M \in \mathbb{R}, u_n \geq M$

(4) $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n \geq M$

(a) "La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend (au moins) une fois la valeur $+\infty$."

(b) "La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne prend jamais la valeur $-\infty$."

(c) "La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée supérieurement"

(d) "La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée inférieurement par M."

Correction
(1)-(b), (2)-(d), (3)-(a), (4)-(c).

5 Limites et continuité

Exercice 5.1

Lorsqu'un objet de température initiale T_0 est plongé dans un milieu de température constante T_m, l'évolution de sa température est donnée par $T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$ où k est une constante positive qui dépend de l'objet et du milieu dans lequel il est plongé. Qu'elle est la limite de cette fonction lorsque t tend vers l'infini ?

Correction
$\lim_{t\to+\infty} T(t) = T_m$.

Exercice 5.2

En l'absence de frottement, une masse soumise à la pesanteur possède une accélération constante de g m s^{-2}. Sa vitesse $v(t)$ évolue suivant $v(t) = v_0 + gt$. En présence d'un frottement, la masse $m > 0$ subit une résistance à sa progression dans l'air qui est d'autant plus élevée que sa vitesse est élevée. Dans le modèle d'un fluide très visqueux (par exemple le miel), la force de frottement $\mu > 0$ est directement proportionnelle à la vitesse de la masse. Dans ce cas, la vitesse est donnée par

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{\mu}{m}t} + \frac{mg}{\mu}(1 - e^{-\frac{\mu}{m}t}).$$

Quelle est la limite de cette fonction pour $t \to +\infty$?

Correction
$\lim_{t\to+\infty} v(t) = \frac{mg}{\mu}$.

Exercice 5.3

Dans le modèle de croissance de population de VERHULST la taille de la population est donnée par

$$P(t) = P_m \frac{e^{rP_m t}}{K + e^{rP_m t}}$$

où K, r et P_m désignent des constantes positives. Trouver la limite de $P(t)$ pour $t \to +\infty$.

Correction
$\lim_{t\to+\infty} P(t) = \lim_{t\to+\infty} P_m \frac{1}{\frac{K}{e^{rP_m t}}+1} = P_m$.

Exercice 5.4 (F.I.)

Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2|x|}{x}$, c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+2|x|}{x}$,

d) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$, e) $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}$, f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$,

g) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$, h) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1}$, $(n\in\mathbb{N})$, i) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$,

Correction

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x+x^2}+1}{\sqrt{1+x+x^2}+1} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x+x^2)-1}{x(\sqrt{1+x+x^2}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2}+1} = \frac{1}{2}$,

b) La limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2|x|}{x}$ n'existe pas car on a $\displaystyle\lim_{x\to 0^\pm} \frac{x^2+2|x|}{x} = \pm 2$,

c) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+2|x|}{x} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-2x}{x} = \lim_{x\to-\infty} x-2 = -\infty$,

d) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = 4$,

e) $\lim_{x\to\pi} \dfrac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)} = \lim_{x\to\pi} \dfrac{1-\cos^2(x)}{1+\cos(x)} = \lim_{x\to\pi} \dfrac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{1+\cos(x)} = \lim_{x\to\pi} 1-\cos(x) = 2$,

f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} \cdot \dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to 0} \dfrac{(1+x)-(1+x^2)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})} = \lim_{x\to 0} \dfrac{1-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{2}$,

g) La limite $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$ n'existe pas car l'existence des racines impose $x \geq 3$,

h) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^n-1} = \lim_{x\to 1} \dfrac{1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1} = \dfrac{1}{n}$,

i) $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) \dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0^+$;

Exercice 5.5

Compléter le tableau suivant :

	$f(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$	$f(x)=\frac{1}{x}\sin(x)$	$f(x)=x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$	$f(x)=\frac{1}{x}\cos(x)$
$\lim_{x\to 0} f(x)$				
$\lim_{x\to+\infty} f(x)$				
$\lim_{x\to-\infty} f(x)$				

Correction

	$f(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$	$f(x)=\frac{1}{x}\sin(x)$	$f(x)=x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$	$f(x)=\frac{1}{x}\cos(x)$
$\lim_{x\to 0} f(x)$	0	1	0	$\nexists$
$\lim_{x\to+\infty} f(x)$	1	0	$+\infty$	0
$\lim_{x\to-\infty} f(x)$	1	0	$-\infty$	0

On connaît la limite fondamentale $\lim_{n} n\sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1$. À partir de cette limite on va démontrer les réponses données au tableau ci-dessus.

- ⋆ D'après le théorème d'encadrement $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ car $-1 \leq \sin(x) \leq 1$
- ⋆ D'après la limite fondamentale on a immédiatement $\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$
- ⋆ Par changement de variable on trouve $\lim_{x\to-\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \overset{x=-t}{=} \lim_{t\to+\infty} -t\sin\left(-\frac{1}{t}\right) \overset{\sin(-a)=-\sin(a)}{=} \lim_{t\to+\infty} t\sin\left(\frac{1}{t}\right) = 1$
- ⋆ Par changement de variable on trouve $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\sin(x) \overset{x=1/t}{=} \lim_{t\to\pm\infty} t\sin\left(\frac{1}{t}\right) = 1$
- ⋆ D'après le théorème d'encadrement $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\sin(x) = 0$ car $-1 \leq \sin(x) \leq 1$
- ⋆ D'après le théorème d'encadrement $\lim_{x\to 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ car $-1 \leq \cos(x) \leq 1$
- ⋆ $\lim_{x\to+\infty} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$
- ⋆ $\lim_{x\to-\infty} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$
- ⋆ $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\cos(x)$ n'existe pas car $\lim_{x\to 0^\pm} \frac{1}{x}\cos(x) = \pm\infty$
- ⋆ D'après le théorème d'encadrement $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\cos(x) = 0$ car $-1 \leq \cos(x) \leq 1$

Exercice 5.6 (Fonction prolongeable par continuité)

Soit f l'application de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \qquad f(x) := x\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

Correction
Comme $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, on peut définir la fonction

$$\begin{aligned} &\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

qui est continue.

Exercice 5.7
Étudier la continuité en 0 de la fonction

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ x\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Correction
Elle est continue car $x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est continue pour $x > 0$, $x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ est continue pour $x < 0$ et

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0), \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0). \end{aligned}$$

Exercice 5.8
1. Dire si l'application $f\colon \mathbb{R}\setminus\{\pm1\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{1-x^2}$ se prolonge par continuité en -1 et en 1. Donner le prolongement par continuité le cas échéant.
2. Dire si l'application $f\colon \mathbb{R}\setminus\{\pm1\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$ se prolonge par continuité en -1 et en 1. Donner le prolongement par continuité le cas échéant.

Correction
1. On a $f(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{x-1}$ donc $\lim_{x\to -1} f(x) = -1/2$ et $\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \pm\infty$. La fonction f n'est donc pas prolongeable par continuité en 1 mais elle est prolongeable par continuité en -1 et ce prolongement vaut $-1/2$.
2. On a $f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} = -\frac{1}{1+x}$ donc $\lim_{x\to 1} f(x) = -1/2$ et $\lim_{x\to(-1)^\pm} f(x) = \mp\infty$. La fonction f n'est donc pas prolongeable par continuité en -1 mais elle est prolongeable par continuité en 1 et ce prolongement vaut $-1/2$.

Exercice 5.9
En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle I dans les cas suivants (sans résoudre l'équation) :

a) $f(x) = x^2 - 16$, $I =]0, +\infty[$,
b) $f(x) = x^2 - 160$, $I =]-\infty, 0[$,
c) $f(x) = x^2 - \sqrt{2}$, $I =]-\infty, 0[$,
d) $f(x) = x^3 - \sqrt{\pi}$, $I =]0, +\infty[$.

Correction
Les énoncés du *théorème des valeurs intermédiaires* suivants sont équivalents :

- ⋆ Si f est définie et continue en tout point d'un intervalle I alors pour tout sous-intervalle J de I, l'image $f(J)$ est un intervalle.
- ⋆ L'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par une fonction continue est un intervalle de $\mathbb{R}$.
- ⋆ Soient f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a, b \in I$ avec $f(a) \le f(b)$. Alors f atteint toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$; plus précisément :

$$\forall d \in [f(a), f(b)] \quad \exists c \text{ compris entre } a \text{ et } b \text{ tel que } f(c) = d.$$

a) On considère la fonction $f\colon x \mapsto x^2 - 16$. f est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$. Étant une parabole convexe de sommet $(0, -16)$, la fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. De plus $f(0) = -16$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Par conséquent, la fonction f, strictement croissante sur $]0; +\infty[$, est négative en $x = 0$ et positive pour $x \to +\infty$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation associée à la fonction f admet une unique solution sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

b) On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 - 16$. f est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$. Étant une parabole convexe de sommet $(0, -16)$, la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$. De plus $f(0) = -16$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Par conséquent, la fonction f, strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$, est négative en $x = 0$ et positive pour $x \to -\infty$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation associée à la fonction f admet une unique solution sur l'intervalle $]-\infty; 0[$.

c) On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 - \sqrt{2}$. f est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$. Étant une parabole convexe de sommet $(0, -\sqrt{2})$, la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$. De plus $f(0) = -\sqrt{2}$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Par conséquent, la fonction f, strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$, est négative en $x = 0$ et positive pour $x \to -\infty$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation associée à la fonction f admet une unique solution sur l'intervalle $]-\infty, 0[$.

d) Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 - \sqrt{\pi} = 0$. f est définie et continue sur $]0, +\infty[$. Elle est strictement croissante, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\sqrt{\pi} < 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty > 0$. Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un et un seul $c \in]0, +\infty[$ tel que $f(c) = 0$ et ce c est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 5.10

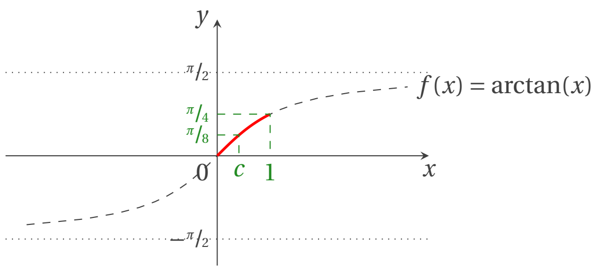
Montrer qu'il existe $x \in]0, 1[$ tel que $\arctan(x) = \pi/8$, puis qu'il est unique. Déterminer x par dichotomie avec une précision de $1/8$.

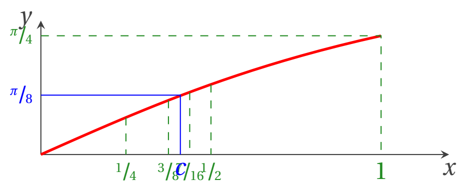
Correction

Rappelons le théorème des valeurs intermédiaires : *soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Alors pour toute valeur y comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.* Comme la fonction arctan est définie et continue de $\mathbb{R}$ dans $]-\pi/2, \pi/2[$, elle est donc continue sur l'intervalle $[0; 1]$. Puisque $\pi/8$ est compris entre $\arctan(0) = 0$ et $\arctan(1) = \pi/4$, alors il existe un $c \in [0, 1]$ tel que $\arctan(c) = \pi/8$. De plus, la fonction arctan est monotone croissante donc ce c est unique.

Dichotomie :

k	a_k	b_k	x_k	erreur$_k \le$
1	0	1	1/2	1
2	0	1/2	1/4	1/2
3	1/4	1/2	3/8	1/4
4	3/8	1/2	7/16	1/8





Avancé

Exercice 5.11 (Discontinuité de première espèce)

Soit f une application de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad f(x) := \frac{x}{|x|}.$$

Montrer que f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Correction

On ne peut pas définir une application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ car

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +1.$$

Exercice 5.12 (Discontinuité de seconde espèce)

Soit f une application de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \qquad f(x) := \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Montrer que f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Correction
La limite de $f(x)$ pour x qui tend vers 0 n'existe pas.

Exercice 5.13

Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Montrer qu'il existe $\alpha \in [0,1]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$ (un tel point est appelé *point fixe* de f).

Correction
Si $f(0) = 0$ alors $\alpha = 0$ est solution du problème. Si $f(1) = 1$ alors $\alpha = 1$ est solution du problème. Supposons $f(0) \neq 0$ et $f(1) \neq 1$. Soit g la fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $g(x) = f(x) - x$. Comme $f(0) > 0$ alors $g(0) > 0$. Comme $f(1) < 1$ alors $g(1) < 0$. Or g est continue sur $[0,1]$ donc il existe $\alpha \in [0,1]$ tel que $g(\alpha) = 0$, ce qui implique $f(\alpha) = \alpha$.

Exercice 5.14

Soit f et g deux fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(a) < g(a)$ et $f(b) > g(b)$. Prouver qu'il existe $x_0 \in]a,b[$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.

Correction
On considère la fonction $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = f(x) - g(x)$. On remarque que $h(a) < 0$ et $h(b) > 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $h(x_0) = 0$. Comme $h(a) < 0$ et $h(b) > 0$, alors $x_0 \in]a,b[$. Comme $h(x_0) = 0$ alors $f(x_0) = g(x_0)$.

Exercice 5.15

Soit f une fonction continue et injective de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Prouver que f est strictement monotone.

Correction
On considère trois points x_i tels que $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$. Supposons par absurde que $f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, si on considère l'intervalle $I = [f(x_2), \min f(x_1), f(x_3)]$, pour tout $u \in I$ il existe $s \in]x_1, x_2[$ et $t \in]x_2, x_3[$ tels que $f(s) = u = f(t)$. Puisque f est injective, $s = t$, en contradiction avec le fait que $x_1 < s < x_2 < t < x_3$.

Exercice 5.16 (Application du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

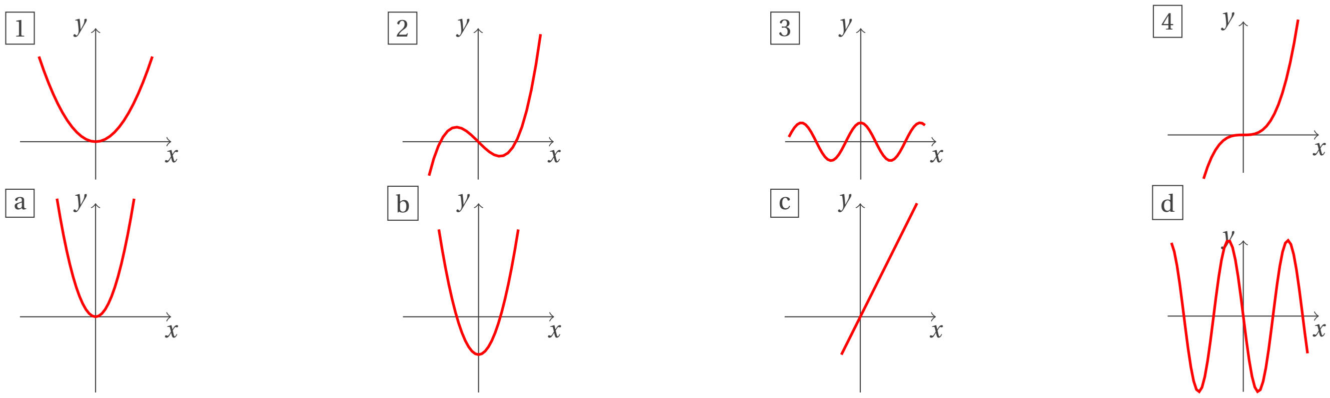
Montrer que toute fonction polynomiale de degré impair possède au moins un zéro réel.

Correction
Soit le polynôme $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ avec n impair. Si $a_n > 0$ alors $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$; P étant une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P(\alpha) = 0$. De même, si $a_n < 0$ alors $\lim_{x\to-\infty} P(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} P(x) = -\infty$; P étant une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P(\alpha) = 0$.

6
Dérivabilité

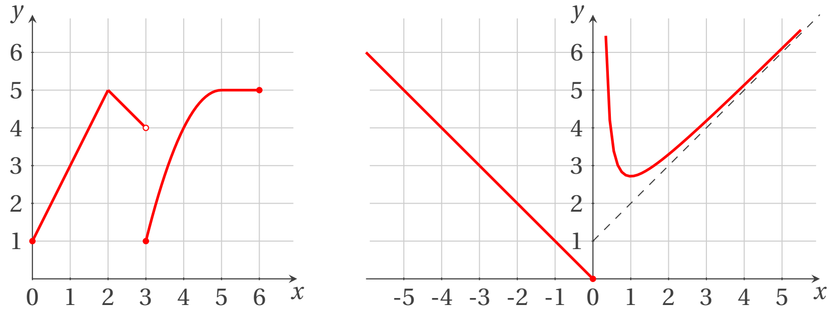
Premiers calculs

Exercice 6.1
Pour les fonctions représentées en figure, trouver les appariements entre les fonction 1, 2, 3, 4 et les dérivées a, b, c, d.



Correction
(1)-(c), (2)-(b), (3)-(d), (4)-(a).

Exercice 6.2
Pour chacune des fonctions représentées, tracer une esquisse du graphe de leur dérivée.



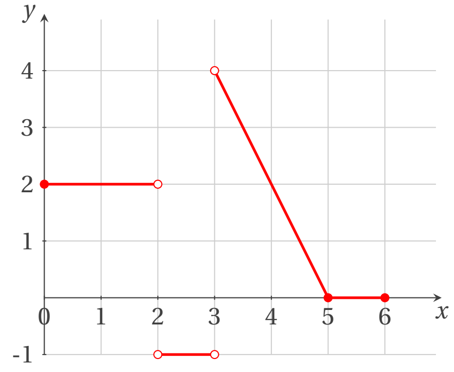
Correction
Pour la fonction de gauche on remarque que

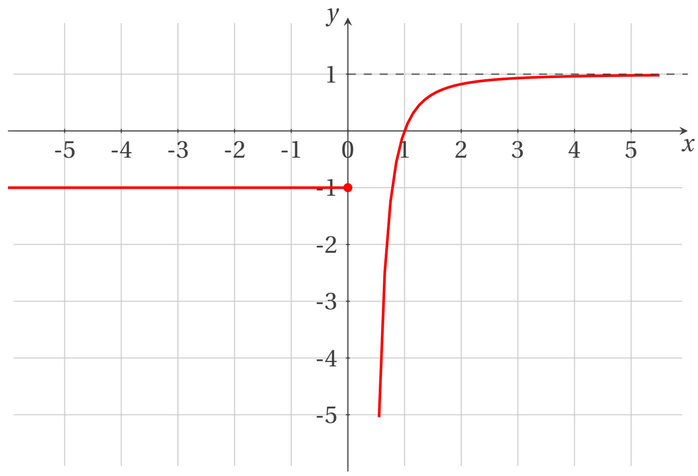
★ $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } 0 \le x \le 2, \\ -x+7 & \text{si } 2 \le x < 3, \\ 5-(x-5)^2 & \text{si } 3 \le x \le 5, \\ 5 & \text{si } x \ge 5 \end{cases}$

★ $f'(2)$ n'existe pas car $\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 2$ tandis que $\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = -1$

★ $f'(3)$ n'existe pas car f n'est pas continue en $x=3$

★ $f'(5) = 0$





Exercice 6.3

Calculer les dérivées des fonctions :

a) $\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$ b) $4x^3+2x-1$ c) $\dfrac{x^2+3}{x^3+3x-7}$ d) $x^3\sin(x)$

e) $x^2\tan(x)$ f) $5x^2$ g) $\dfrac{\cos(x)}{1-\sin(x)}$ h) $\sin(x)\cos(x)$

i) $\cos(-2x+1)$ j) $\dfrac{x}{\sin(2x)}$ k) $\ln(x^2+1)$ l) e^{x^2-3}

Correction

a) $(x^{-3/2})' = -\frac{3}{2}x^{-5/2} = -\frac{3}{2\sqrt{x^5}}$

b) $12x^2+2$

c) $\frac{2x(x^3+3x-7)-(x^2+3)(3x^2+3)}{(x^3+3x-7)^2} = -\frac{x^4+6x^2+14x+9}{(x^3+3x-7)^2}$

d) $x^2(3\sin(x)+x\cos(x))$

e) $2x\tan(x)+x^2(1+\tan^2(x))$

f) $10x$

g) $\dfrac{1}{1-\sin(x)}$

h) $\cos^2(x)-\sin^2(x) = 2\cos^2(x)-1$

i) $2\sin(-2x+1)$

j) $\frac{\sin(2x)-2x\cos(2x)}{\sin^2(2x)}$

k) $\frac{2x}{x^2+1}$

l) $2xe^{x^2-3}$

Exercice 6.4 (Tangentes)

1. Trouver l'équation de la tangente au graphe de la fonction définie par $f(x)=x^2+1$ en 1.
2. Trouver l'équation de la tangente au graphe de la fonction définie par $f(x)=\frac{4x}{x^2+1}$ en 0.
3. Trouver l'équation de la tangente au graphe de la fonction définie par $f(x)=\frac{4x}{x^2+1}$ en 1.
4. Le graphe de la fonction définie par $f(x)=ax^2+bx+3$ passe par le point $(2,0)$. La tangente au graphe de f en ce point est parallèle à la droite d'équation $y=3x+2$. Trouver a et b.
5. Le graphe de f passe par le point $(2,3)$ et la pente de la tangente au graphe de f en $x=a$ est égale à $2a$. Passe-t-il par le point $(3,9)$?
6. La pente de la tangente au graphe de f en $x=1$ est égale à 3. La pente de la tangente au graphe de g en $x=1$ est égale à 7. Calculer la pente de la tangente au graphe de $f+g$ en $x=1$. Que peut-on dire de la pente de la tangente au graphe de fg en $x=1$? Que peut-on dire de la pente de la tangente au graphe de fg en $x=1$ si $f(1)=3$ et $g(1)=2$?

Correction

1. Pente : $f'(1)=2$. Équation : $y=2(x-1)+f(1)=2x$.
2. Pente : $f'(0)=4$. Équation : $y=4x+f(0)=4x$.
3. Pente : $f'(1)=0$. Équation : $y=f(1)=2$.
4. $f'(2)=3$ et $f(2)=0$ donc $a=9/4$ et $b=-6$.

5. $f'(a) = 2a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ donc $f(x) = x^2 + \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$. Comme $f(2) = 3$, $\kappa = -1$ et $f(x) = x^2 - 1$. Puisque $f(3) = 8$, le graphe de f ne passe pas par le point $(3,9)$.
6. $f'(1) = 3$ et $g'(1) = 7$, alors $(f+g)'(1) = 10$ (pente de la tangente au graphe de $f+g$ en $x = 1$). Comme $(fg)'(1) = f'(1)g(1) + f(1)g'(1)$ on ne peut rien dire sans connaitre $f(1)$ et $g(1)$. Si $f(1) = 3$ et $g(1) = 2$ alors $(fg)'(1) = 23$ (pente de la tangente au graphe de fg en $x = 1$).

Exercice 6.5

Le volume V et la pression P d'un gaz maintenu à une température constante sont liés par la loi de Van der Waals qui s'écrit $P(V) = nRT/(V-nb) - an^2/V^2$ où a et b sont des constantes propres au gaz, n désigne le nombre de moles, T est la température et R est une constante. Calculer P'.

Correction

$P'(V) = -\frac{nRT}{(V-nb)^2} + \frac{2an^2}{V^3}$.

Exercice 6.6

Trouver la vitesse au temps $t = 2$ d'une masse attachée à un ressort et dont la position au temps t est donnée par $x(t) = A\cos(2\pi\omega t)$. Que se passe-t-il avec la vitesse si on double l'amplitude A?

Correction

$x'(t) = -2\pi\omega A\sin(2\pi\omega t)$. Lorsque l'amplitude double, la vitesse double.

Règle de L'Hôpital

Exercice 6.7 (Théorème de l'Hôpital - F.I. $\left[\frac{0}{0}\right]$)

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to2} \frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$
2. $\lim_{x\to-1} \frac{x^2-1}{x^2+x}$
3. $\lim_{x\to0} \frac{2x^2+x}{x^2-x}$
4. $\lim_{x\to3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+9}$
5. $\lim_{x\to-3} \frac{x^2+10x+21}{x^2-9}$
6. $\lim_{x\to1} \frac{x^2+3x-4}{x^2-x}$
7. $\lim_{x\to1} \frac{x^3+x^2-5x+3}{x-1}$
8. $\lim_{x\to1} \frac{x^3+x^2-5x+3}{x^2-1}$
9. $\lim_{x\to1} \frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-1}$
10. $\lim_{x\to2} \frac{x-2}{x^3-3x^2+4}$
11. $\lim_{x\to2} \frac{x^2-4}{x^3-3x^2+4}$
12. $\lim_{x\to2} \frac{x^3-8}{x^3-3x^2+4}$

Correction

1. 0
2. 2
3. -1
4. ∞
5. $-\frac{2}{3}$
6. 5
7. 0
8. 0
9. 0
10. ∞
11. ∞
12. ∞

Exercice 6.8 (Théorème de l'Hôpital - F.I. $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$)

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+2x^2+1}{x^4}$
2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}$
3. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}$
4. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3}$
5. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x}{e^x}$
6. $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x^4}$
7. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+x}{x^2}$
8. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}$
9. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}$
10. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$
11. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{e^x}$
12. $\lim_{x\to0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}$
13. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\ln(x^2)}$

Correction

1. 1
2. $+\infty$
3. $+\infty$
4. $+\infty$
5. 0
6. $+\infty$
7. $+\infty$
8. 0
9. 0
10. 0
11. 0
12. 0
13. $+\infty$

Exercice 6.9 (Théorème de l'HÔPITAL)

Calculer les limites suivantes. Pourquoi ne peut-on pas utiliser le théorème de l'HÔPITAL pour les calculer ?

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin(x)}{x}$,
2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(x)}{x}$,
3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x}{x}$,
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x}$,
5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)}$,
6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\ln(x)}$,
7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin(x)}{x}$,
8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\cos(x)}{2x-\cos(x)}$.

Correction

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin(x)}{x}=0$ mais on ne peut pas utiliser le théorème de l'HÔPITAL car $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin(x)$ n'existe pas.
2. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\cos(x)}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\cos(x)}{x}=-\infty$, et on ne peut pas utiliser le théorème de l'HÔPITAL car ce n'est pas une forme indéterminée : $\lim\limits_{x\to0}\cos(x)=1$.
3. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^x}{x}=-\infty$mais on ne peut pas utiliser le théorème de l'HÔPITAL car ce n'est pas une forme indéterminée : $\lim\limits_{x\to0}e^x=1$.
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x}=0$ mais on ne peut pas utiliser le théorème de l'HÔPITAL car ce n'est pas une forme indéterminée : $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$.
5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{\sin(x)}{x}}=0$ mais on ne peut pas utiliser le théorème de l'HÔPITAL car $\lim\limits_{x\to0}\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)'=\lim\limits_{x\to0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ qui n'existe pas.
6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\ln(x)}=0$ mais on ne peut pas utiliser le théorème de l'HÔPITAL car $\lim\limits_{x\to0}x\neq\lim\limits_{x\to0}\ln(x)$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin(x)}{x}=1+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$ mais on ne peut pas utiliser le théorème de l'HÔPITAL car $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x+\sin(x))'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to0}1+\cos(x)$ qui n'existe pas.
8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\cos(x)}{2x-\cos(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{\cos(x)}{x}}{2-\frac{\cos(x)}{x}}=\frac{1}{2}$ mais on ne peut pas utiliser le théorème de l'HÔPITAL car $\lim\limits_{x\to0}\sin(x)$ n'existe pas.

Exercice 6.10 (Théorème de l'HÔPITAL - F.I. $[0\cdot\infty]$)

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln(x)$
2. $\lim\limits_{x\to0^+}x^2\ln(x)$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}$
5. $\lim\limits_{x\to0^+}xe^{1/x}$
6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan(x)$
7. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\tan(x)$

Correction

1. 0
2. 0
3. 0
4. 0
5. $+\infty$
6. -1
7. 0

Exercice 6.11 (Théorème de l'HÔPITAL - F.I. $[\infty-\infty]$)

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin(x)}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln(x)}-\dfrac{1}{x-1}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos(x)}-\tan(x)\right)$
5. $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{1}{\ln(x)}-\dfrac{x}{2\ln(x)}\right)$
6. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln(x)}-\dfrac{1}{(x-1)^2}\right)$

Correction

1. 0
2. $\frac{1}{2}$
3. $\frac{1}{2}$
4. 0
5. ∞
6. ∞

Exercice 6.12

Calculer les limites suivantes.

1. $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{\ln(x)}$,
2. $\lim_{x\to 1} \frac{2\ln(x)}{x-1}$,
3. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$,
4. $\lim_{x\to 2} \frac{\sin(\pi x)}{x-2}$,
5. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\tan(x)}\right)$,
6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}}$,
7. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right)$,
8. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos(ax)}{x^2}\right)$,
9. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x+\frac{x^3}{6}}{x^5}$.

Correction

1. Soient $f(x) = \sin(\pi x)$ et $g(x) = \ln(x)$; alors $f'(x) = \pi\cos(\pi x)$, $g'(x) = \frac{1}{x}$ et
$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{\ln(x)} = \left[\frac{0}{0}\right], \qquad \lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 1} (\pi x)\cos(\pi x) = -\pi$$
donc
$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{\ln(x)} = -\pi.$$

2. Soient $f(x) = 2\ln(x)$ et $g(x) = x-1$; alors $f'(x) = \frac{2}{x}$, $g'(x) = 1$ et
$$\lim_{x\to 1} \frac{2\ln(x)}{x-1} = \left[\frac{0}{0}\right], \qquad \lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{2}{x} = 2$$
donc
$$\lim_{x\to 1} \frac{2\ln(x)}{x-1} = 2.$$

3. Soient $f(x) = e^x-1$ et $g(x) = x$; alors $f'(x) = e^x$, $g'(x) = 1$ et
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \left[\frac{0}{0}\right], \qquad \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} e^x = 1$$
donc
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1.$$

4. Soient $f(x) = \sin(\pi x)$ et $g(x) = x-2$; alors $f'(x) = \pi\cos(\pi x)$, $g'(x) = 1$ et
$$\lim_{x\to 2} \frac{\sin(\pi x)}{x-2} = \left[\frac{0}{0}\right], \qquad \lim_{x\to 2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 2} \pi\cos(\pi x) = \pi$$
donc
$$\lim_{x\to 2} \frac{\sin(\pi x)}{x-2} = \pi.$$

5. $\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\tan(x)} = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$. Soient $f(x) = 1-\cos(x)$ et $g(x) = \sin(x)$; alors $f'(x) = \sin(x)$, $g'(x) = \cos(x)$ et
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} = \left[\frac{0}{0}\right], \qquad \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 0$$
donc
$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\tan(x)}\right) = 0.$$

6. Soient $f(x) = x$ et $g(x) = 1-\sqrt{1-x}$; alors $f'(x) = 1$, $g'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$ et
$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}} = \left[\frac{0}{0}\right], \qquad \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} -2\sqrt{1-x} = -2$$
donc
$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}} = -2.$$

7. $\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}\right)=\frac{x-\sin(x)}{x\sin(x)}$. Soient $f(x)=x-\sin(x)$ et $g(x)=x\sin(x)$; alors $f'(x)=1-\cos(x)$, $g'(x)=\sin(x)+x\cos(x)$, $f''(x)=\sin(x)$, $g''(x)=2\cos(x)-x\sin(x)$ et

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin(x)}{x\sin(x)}=\left[\frac{0}{0}\right],\qquad \lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)+x\cos(x)}=\left[\frac{0}{0}\right],\qquad \lim_{x\to0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{2\cos(x)-x\sin(x)}=0$$

donc

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}\right)=0.$$

8. Soient $f(x)=1-\cos(ax)$ et $g(x)=x^2$; alors $f'(x)=a\sin(ax)$, $g'(x)=2x$, $f''(x)=a^2\cos(ax)$, $g''(x)=x$ et

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(ax)}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right],\qquad \lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{a\sin(ax)}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right],\qquad \lim_{x\to0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\lim_{x\to0}\frac{a^2\cos(ax)}{2}=\frac{a^2}{2}$$

donc

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(ax)}{x^2}=\frac{a^2}{2}.$$

9. Soient $f(x)=\sin(x)-x+\frac{x^3}{6}$ et $g(x)=x^5$; alors $f'(x)=\cos(x)-1+\frac{x^2}{2}$, $g'(x)=5x^4$, $f''(x)=-\sin(x)+x$, $g''(x)=20x^3$, $f'''(x)=-\cos(x)+1$, $g'''(x)=60x^2$, $f^{(iv)}(x)=\sin(x)$, $g^{(iv)}(x)=120x$ et

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\lim_{x\to0}\frac{f'''(x)}{g'''(x)}=\left[\frac{0}{0}\right],\qquad \lim_{x\to0}\frac{f^{(iv)}(x)}{g^{(iv)}(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{120x}=\frac{1}{120}$$

donc

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{120}.$$

Étude des variations

Exercice 6.13

Montrer que la fonction $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=(x^2-3x+2)e^x$ admet deux racines réelles $\ell_1<\ell_2$ de f et les calculer.

Correction

$f(x)=(x-1)(x-2)e^x$ donc f admet deux et seulement deux zéros réels $\ell_1=1$ et $\ell_2=2$.

Exercice 6.14

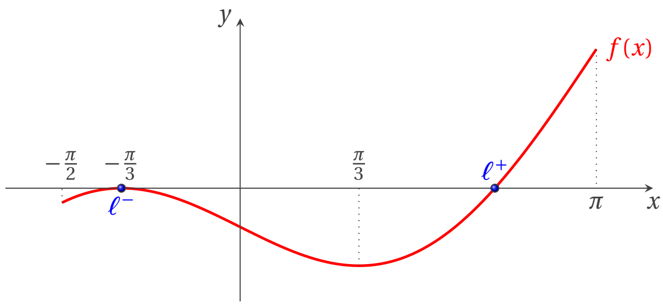
Considérons la fonction $f\colon[-\frac{\pi}{2};\pi]\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\frac{x}{2}-\sin(x)+\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Montrer qu'il existe deux solutions $\ell^-<0$ et $\ell^+>0$ de l'équation $f(x)=0$ pour $x\in[-\frac{\pi}{2};\pi]$.

Correction

- ⋆ f est classe $\mathscr{C}^\infty([-\frac{\pi}{2};\pi])$;
- ⋆ $f(-\frac{\pi}{2})=1-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{12}\approx-0.12785<0$, $f(0)=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\approx-0.34244<0$, $f(\pi)=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\approx1.2284>0$;
- ⋆ $f'(x)=\frac{1}{2}-\cos(x)$;
- ⋆ f est croissante sur $[-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{3}]\cup[\frac{\pi}{3};\pi]$, décroissante sur $[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}]$;
- ⋆ $x=-\frac{\pi}{3}$ est un maximum local et $f(-\frac{\pi}{3})=0$; $x=\frac{\pi}{3}$ est un minimum local et $f(\frac{\pi}{3})<0$;
- ⋆ $f''(x)=\sin(x)$;
- ⋆ f est concave sur $[-\frac{\pi}{2};0]$, convexe sur $[0;\pi]$.



Par conséquence $\ell^- = -\frac{\pi}{3}$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ pour $x \in [-\frac{\pi}{2}; 0]$ et il existe un et un seul ℓ^+ solution de l'équation $f(x) = 0$ pour $x \in [0; \pi]$. On peut même améliorer l'encadrement et conclure que $\ell^+ \in [\frac{\pi}{3}; \pi]$.

Exercice 6.15

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Alors l'expression de f peut être…

☐ 1. $f(x) = |x| + 1$

☐ 2. $f(x) = e^x - x$

☐ 3. $f(x) = \frac{x^2+1}{|x|+1}$

☐ 4. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

☐ 5. $f(x) = \ln(x^2+1)$

Correction

■ 1. Vrai : $f(0) = 1$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, f est paire et $f'(x) > 0$ pour $x > 0$

■ 2. Vrai : $f(0) = 1$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, $f'(x) = e^x - 1$ et $e^x = 1$ ssi $x = 0$, $e^x > 1$ si $x > 0$, $e^x < 1$ si $x < 0$

☐ 3. Faux : $f(x) = \frac{x^2+1}{|x|+1} = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x^2+1}{-x+1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$ donc $f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2} = \frac{(x-(-1-\sqrt{2}))(x-(-1+\sqrt{2}))}{(x+1)^2} & \text{si } x \geq 0 \\ -\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} = -\frac{(x-(1-\sqrt{2}))(x-(1+\sqrt{2}))}{(x-1)^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$ ainsi

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		0		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	$(2-\sqrt{2})\sqrt{2}$	↗	1	↘	$(2-\sqrt{2})\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

■ 4. Vrai : $f(0) = 1$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, f est paire et $f'(x) > 0$ pour $x > 0$

☐ 5. Faux : $f(0) = \ln(1) = 0 \neq 1$

Exercice 6.16

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. Établir si f est continue en $x = 0$.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$. En déduire l'équation de la droite tangente à f en $x = \frac{1}{\pi}$.
3. Établir si f est dérivable en $x = 0$.
4. Établir si f est f est de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

Correction

1. La fonction est clairement continue pour $x \neq 0$. Pour $x = 0$ on a

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

   donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$: f est continue en 0.

2. Pour $x \neq 0$ la fonction est clairement dérivable et on a

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x > 0, \\ 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

   La droite tangente à f en $x = x_0$ a équation $y = f'(x_0)x + (f(x_0) - f'(x_0)x_0)$ donc pour $x_0 = \frac{1}{\pi}$ on a $y = -\frac{3}{\pi^2}x + \frac{2}{\pi^3}$.

3. La fonction est dérivable en $x=0$ ssi la limite $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ existe et est finie.
On a
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3\cos\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x-0}=0,$$
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x-0}=0,$$
donc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$: f est dérivable en 0 et on a
$$f'(x)=\begin{cases}3x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)+x\sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x>0,\\ 0, & \text{si } x=0,\\ 3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)-x\cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x<0.\end{cases}$$
4. f' est clairement continue pour $x\neq 0$. Pour $x=0$ on a
$$\lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(3x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)+x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)=0,$$
$$\lim_{x\to 0^-}f'(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)-x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)=0,$$
donc f' est continue en 0. Par conséquent f est de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 6.17

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)=x^2\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ pour $x\neq 0$ et $f(0)=0$.

1. f est-elle continue en $x=0$?
2. Calculer $f'(x)$ pour $x\neq 0$. En déduire l'équation de la droite tangente à f en $x=1$.
3. f est-elle dérivable en $x=0$? Calculer l'équation de la droite tangente à f en $x=0$ le cas échéant.

Correction

1. Comme $\lim_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$ (théorème d'encadrement), la fonction est continue en 0.
2. Pour $x\neq 0$, $f'(x)=2x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$. L'équation de la droite tangente à f en $x=1$ est donc $y=f'(1)(x-1)+f(1)=2(\sin(1)-\cos(1))(x-1)+\sin(1)$.
3. f est dérivable en $x=0$ car on a $f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(\frac{1}{x^2})-0}{x}=0$ (théorème d'encadrement). L'équation de la droite tangente à f en $x=0$ est donc $y=f'(0)x+f(O)=0$.

Exercice 6.18

Soit $g:\,]-\infty,0[\to\mathbb{R}$ une application telle que $g(x)=e^x-1$.

1. Montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$.
2. En utilisant le théorème de la bijection démontrer que l'équation $g(x)=-\frac{1}{2}$ admet une unique solution.
3. Déterminer la fonction inverse g^{-1}. Que sait-on de la continuité de g^{-1} ?
4. Calculer la dérivée de g^{-1} sur $]-1;0[$.

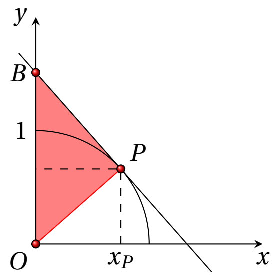
Correction

1. $g(x)=e^x-1$, $g'(x)=e^x$, $g'(x)>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}_-^*$ donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$.
2. **Théorème de la bijection** *Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors f induit une bijection de I dans $f(I)$. De plus, sa bijection réciproque est continue sur $f(I)$, est monotone sur $f(I)$ et a le même sens de variation que f.*
g est définie, continue, dérivable, strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$, ce qui prouve que g réalise une bijection de $\mathbb{R}_-^*$ dans
$$g(\mathbb{R}_-^*)=]\lim_{x\to-\infty}g(x);\lim_{x\to 0}g(x)[=]-1;0[.$$
Comme $-\frac{1}{2}\in g(\mathbb{R}_-^*)$, on en déduit qu'il existe un unique réel $\alpha\in\mathbb{R}_-^*$ tel que $g(\alpha)=-\frac{1}{2}$.
3. $g^{-1}:\,]-1;0[\to\mathbb{R}_-^*$ avec $g^{-1}(y)=\ln(y+1)$. Comme g réalise une bijection de $\mathbb{R}_-^*$ dans $]-1;0[$, la bijection réciproque g^{-1} est une bijection de $]-1;0[$ dans $\mathbb{R}_-^*$. Sachant que g est continue sur $\mathbb{R}_-^*$, on peut en déduire que g^{-1} est continue sur $]-1;0[$.
4. La dérivée de g^{-1} sur $]-1,0[$ est $\frac{1}{1+y}$.

Recherche d'extrema

Exercice 6.19

On considère le quart de circonférence d'équation $y = \sqrt{1-x^2}$ pour $0 < x < 1$. Soit $P = (x_P, y_P)$ un point du quart de circonférence. On note par B le point d'intersection de la tangente en P avec l'axe y. Exprimer la surface du triangle OBP en fonction de x_P.



Correction

Soit $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. L'équation de la droite tangente en $x = x_P$ s'écrit

$$y = f'(x_P)(x - x_P) + f(x_P) = \frac{-x_P}{\sqrt{1-x_P^2}}(x - x_P) + \sqrt{1-x_P^2}$$

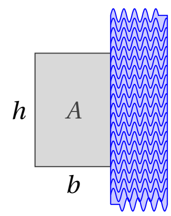
$B = (0, y_B)$ est le point d'intersection de cette droite avec la droite d'équation $x = 0$, donc on a

$$y_B = \frac{x_P^2}{\sqrt{1-x_P^2}} + \sqrt{1-x_P^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x_P^2}}$$

et la surface du triangle OBP en fonction de x_P est $\frac{y_B x_P}{2} = \frac{x_P}{2\sqrt{1-x_P^2}}$.

Exercice 6.20

Un terrain rectangulaire d'aire A se trouve le long de la rive (rectiligne) d'une rivière. Quelle est la longueur minimale de la clôture nécessaire pour clôturer les trois autres côtés du terrain?



Correction

Aire : $A = bh$. Longueur clôture : $\ell(b) = 2b + h(b) = 2b + \frac{A}{b}$. Recherche du minimum : $\ell'(b) = 2 - \frac{A}{b^2}$ et $\ell'(b) = 0$ ssi $b = \sqrt{\frac{A}{2}}$.
Comme $\ell''(b) = \frac{2A}{b^3} > 0$ pour tout $b > 0$, il s'agit bien d'un minimum.
Remarque : si on clôture tous les quatre côtés on a $\ell(b) = 2b + 2h(b)$ et donc $h = b = \sqrt{A}$.

Exercice 6.21

Trouver le point de la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$ plus proche au point $(4, 0)$.

Correction

Soit $(x, \sqrt{x})$ un point quelconque de la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$. Il s'agit de trouver le minimum de la distance entre ce point et le point $(4, 0)$:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^+} \sqrt{(x-4)^2 + (\sqrt{x}-0)^2} = \min_{x\in\mathbb{R}^+} \underbrace{\sqrt{x^2-7x+16}}_{d(x)}.$$

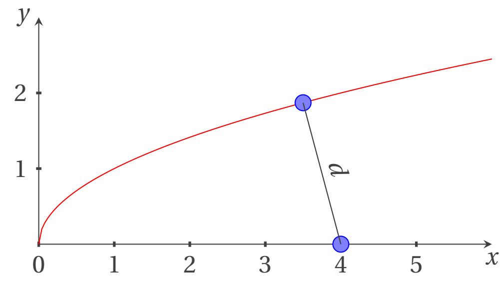
Sa dérivée vaut

$$d'(x) = \frac{2x-7}{2\sqrt{x^2-7x+16}}$$

et on a

- ⋆ $d'(x) = 0 \iff x = \frac{7}{2}$,
- ⋆ $d'(x) > 0 \iff x > \frac{7}{2}$,
- ⋆ $d'(x) < 0 \iff x < \frac{7}{2}$,

par conséquent le point cherché est $\left(\frac{7}{2}, \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$.



Exercice 6.22 (Dérivée d'une fonction composée)

Un glaçon sphérique fond en conservant sa forme. Le taux de variation de son volume avec le temps est proportionnel à sa surface. Il faut une heure pour qu'un glaçon de un centimètre de rayon fonde totalement. Après combien de temps le glaçon a-t-il diminué de moitié en volume ? Rappel : la surface et le volume d'une sphère de rayon r sont respectivement $S = 4\pi r^2$ et $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Correction

Le rayon est fonction du temps donc $V'(t) = 4\pi[r(t)]^2 r'(t)$. Comme le taux de variation de son volume avec le temps est proportionnel à sa surface, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $V'(t) = k4\pi[r(t)]^2$. Donc $4\pi[r(t)]^2 r'(t) = k4\pi[r(t)]^2$, autrement dit $k = r'(t)$ ce qui implique que $r(t) = at + b$. Comme il faut une heure pour qu'un glaçon de un centimètre de rayon fonde totalement, on a $r(0) = 1$ et $r(1) = 0$ et on obtient la relation $r(t) = 1 - t$. On cherche alors $\hat{t}$ tel que $V(\hat{t}) = V(0)/2$, c'est-à-dire $\frac{4}{3}\pi(1-\hat{t})^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{1}{2}$: le glaçon a diminué de moitié en volume après $\hat{t} = 1 - 2^{-1/3} \approx 0.20$ h $= 12$ minutes.

Exercice 6.23 (Dérivée d'une fonction composée)

Un glaçon cubique fond en conservant sa forme. Le taux de variation de son volume avec le temps est proportionnel à sa surface. Il faut une heure pour qu'un glaçon de un centimètre de coté fonde totalement. Après combien de temps le glaçon a-t-il diminué de moitié en volume ?

Correction

La surface et le volume d'un cube de coté ℓ sont respectivement $S = 6\ell^2$ et $V = \ell^3$. Le coté est fonction du temps donc $V'(t) = [\ell(t)]^2 \ell'(t)$. Comme le taux de variation de son volume avec le temps est proportionnel à sa surface, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $V'(t) = k6[\ell(t)]^2$. Donc $[\ell(t)]^2 \ell'(t) = k6[\ell(t)]^2$, autrement dit $6k = \ell'(t)$ ce qui implique que $\ell(t) = at + b$. Comme il faut une heure pour qu'un glaçon de un centimètre de coté fonde totalement, on a $\ell(0) = 1$ et $\ell(1) = 0$ et on obtient la relation $\ell(t) = 1 - t$. On cherche alors $\hat{t}$ tel que $V(\hat{t}) = V(0)/2$, c'est-à-dire $(1-\hat{t})^3 = 1/2$: le glaçon a diminué de moitié en volume après $\hat{t} = 1 - 2^{-1/3} \approx 0.20$ h $= 12$ minutes.

Exercice 6.24

Dans une molécule diatomique, l'énergie potentielle varie avec la distance r entre les deux atomes. L'expression empirique de ce potentiel (appelé potentiel de MORSE) est donnée par

$$V(r) = D(1 - e^{\alpha - \beta r})^2$$

où $\alpha, \beta > 0$ sont des constantes propres à chaque molécule. À l'équilibre une molécule de trouve au niveau de son énergie potentielle la plus basse. Trouver cette position d'équilibre. La différence entre l'énergie potentielle à l'équilibre et celle lorsque r tend vers l'infini est l'énergie de dissociation. Calculer cette énergie.

Correction

- ⋆ Position d'équilibre :

$$V'(r) = 2D(1-e^{\alpha-\beta r}) \times (-e^{\alpha-\beta r}) \times (-\beta) = -2\beta V(r) = 0 \qquad \iff \qquad V(r) = 0 \qquad \iff \qquad r = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{et} \quad V\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = D.$$

- ⋆ Énergie de dissociation :

$$\lim_{r\to+\infty} V\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) - V(r) = \lim_{r\to+\infty} D\left(1 - (1 - e^{\alpha-\beta r})^2\right) = \lim_{r\to+\infty} D\left(-e^{2(\alpha-\beta r)} + 2e^{\alpha-\beta r}\right) = D.$$

Exercice 6.25

On dispose d'un compte épargne à un taux d'intérêt annuel de 5%.

1. On place 10 000 €. Calculez les intérêts gagnés au bout d'un an si les intérêts sont versés
   1.1. une fois par an,
   1.2. une fois par mois,
   1.3. en continu.
2. On suppose que les intérêts sont versés une fois par l'an. Après combien d'années le capital aura-t-il triplé ?
3. On suppose que les intérêts sont versés continûment. Quel montant initial doit-on placer pour avoir 25 000 € après dix ans ?

Tous les résultats de cet exercice sont à arrondir au centime le plus proche.

Correction
1. Les calculs suivants sont en €.
   1.1. Dans ce cas, le capital après un an est
   $$(1+0.05)\times 10000 = 10500.$$
   Donc les intérêts s'élèvent à 500 €.
   1.2. Dans ce cas, le capital après un an est
   $$\left(1+\frac{0.05}{12}\right)^{12}\times 10000 = 10511.62.$$
   Donc les intérêts s'élèvent à 511.62 €.
   1.3. Dans ce cas, le capital après un an est
   $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0.05}{n}\right)^{n}\times 10000 = e^{0.05}\times 10000 = 10512.71.$$
   Donc les intérêts s'élèvent à 512.71 €.
2. On note C_0 le capital initial et C_n le capital après n ans. Alors on a (suite géométrique) : $C_n = 1.05^n C_0$. On cherche le plus petit entier n tel que $1.05^n C_0 \ge 3$, ou encore $n\ln(1.05)\ge \ln(3)$. On trouve $n \ge 22.51$. Il faut donc attendre 23 ans.
3. On note C_0 le capital initial et C_n le capital après n ans. Alors on a (suite géométrique) : $C_n = (e^{0.05})^n C_0$, ou encore $C_0 = e^{-0.05n} C_n$. Pour $C_{10} = 25\,000$ € on trouve la capital initial :
   $$C_0 = e^{-0.5}\times 25000 \simeq 15\,163.27 \text{ €}.$$

Théorème des accroissements finis

Exercice 6.26 (Application du théorème des accroissements finis)

Un automobiliste entre sur une autoroute où la vitesse est limitée à 130 km h^{-1}. Quand il ressort, deux heures plus tard et à 305 km de son point d'entrée, des gendarmes lui dressent un PV pour excès de vitesse, bien que sa vitesse n'ait été jamais matériellement contrôlée. Ont-ils raison ?

Correction
Soit $s(t)$ sa position (mesurée en kilomètres) au temps t (mesuré en heures). On a $s(0) = 0$ et $s(2) = 305$. Si la position est une fonction dérivable du temps, alors le théorème des accroissement finis permet de conclure qu'il existe un instant τ avec $0 < \tau < 2$ pour lequel $s'(\tau) = \frac{s(2)-s(0)}{2-0} = 152.5$. En d'autre termes, la voiture doit, à un instant donné, avoir une vitesse de 152.5 km h^{-1}.

Exercice 6.27

Soit $h\colon [-1;1]\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $h(x) = 1-\sqrt[3]{x^2}$. Peut-on appliquer à h le théorème des accroissements finis ?

Correction
Théorème des accroissements finis *Soit f une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a;b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$. Alors il existe $c\in]a;b[$ tel que $f(b)-f(a) = (b-a)f'(c)$.*
h est continue sur $[-1,1]$ et $h'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ si $x\neq 0$ mais $h'(0)$ n'existe pas car $\lim_{x\to}\frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \mp\infty$.

Avancé

Exercice 6.28

Calculer la dérivée 100-ème de la fonction $f(x) = (x^2 - x)^{-1}$.

Correction

On a

- ⋆ $f(x) = \frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$ ssi $A = -1$ et $B = 1$
- ⋆ $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\frac{1}{x} = (-1)^n n! \frac{1}{x^{n+1}}$
- ⋆ $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\frac{1}{x-1} = (-1)^n n! \frac{1}{(x-1)^{n+1}}$

donc $(x^2 - x)^{-1} = (x-1)^{-1} - x^{-1}$ donc $f^{(100)}(x) = 100!\big((x-1)^{-101} - x^{-101}\big)$ et plus généralement

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x) = (-1)^n n! \frac{1}{(x-1)^{n+1}} - (-1)^n n! \frac{1}{x^{n+1}} = (-1)^n n! \big((x-1)^{-n-1} - x^{-n-1}\big)$$

Exercice 6.29

On considère une fonction exponentielle $f\colon x \mapsto c^x$. Soit P le point d'intersection du graphe de f avec la tangente à ce graphe passant par l'origine du plan cartésien. Montrer que l'ordonnée de P ne dépend pas du choix de la base de l'exponentielle, *i.e.* la valeur choisie pour c.

Correction

Notons (x_P, y_P) les coordonnées de P.

- ⋆ P appartient au graphe de la courbe, donc $y_P = c^{x_P}$.
- ⋆ P appartient à la tangente au graphe de f passant par l'origine. Cette droite a pour équation $y = f'(x_P)x$ et l'on a $f'(x) = \ln(c)c^x$ donc on a aussi $y_P = \ln(c)c^{x_P}x_P$.

x_P est alors solution de l'équation $c^{x_P} = \ln(c)c^{x_P}x_P$, ce qui équivaut à $x_P = \frac{1}{\ln(c)} = \log_c(e)$. Alors $y_P = c^{x_P} = e$ quelque soit la base c choisie.

Exercice 6.30

Dans chaque question, on définira une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont le domaine de définition est $\mathbb{R}$ et qui satisfait aux propriétés spécifiées :

a) f est injective et non surjective,

b) f est surjective et non injective,

c) f est bijective et non continue au point 1,

d) f est injective, continue dans $\mathbb{R}$ et bornée,

e) f est continue dans $\mathbb{R}$ et non dérivable au point 1,

f) f est dérivable dans $\mathbb{R}$ et f' existe mais est non continue au point 0,

g) f est bornée et $\lim_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas.

Nota bene : les domaines de départ et d'arrivée sont donnés ! On ne peut choisir que l'expression de $f(x)$.

Correction

a) $f(x) = e^x$,

b) $f(x) = x(x-1)(x+1)$,

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x \neq 1, \\ 0 & \text{si } x = 1, \end{cases}$

d) $f(x) = \arctan(x)$,

e) $f(x) = |x-1|$,

f) $f(x) = \begin{cases} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Exercice 6.31

Étudier brièvement la fonction $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$ et en déduire que $e^\pi > \pi^e$.

Correction

- ⋆ Étude de la fonction :

  * $f'(x) = \frac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)}$,
  * $f'(x) = 0$ ssi $x = e$ et l'on a $f(e) = e$,
  * $f''(x) = \frac{2-\ln(x)}{x\ln^3(x)}$,
  * $f''(e) = \frac{1}{e} > 0$,
* Lien entre la fonction f et l'inégalité :

$$e^{\pi} > \pi^{e} \quad \Longleftrightarrow \quad \ln(e^{\pi}) > \ln(\pi^{e}) \quad \Longleftrightarrow \quad \pi > e\ln(\pi) \quad \overset{e<\pi}{\Longleftrightarrow} \quad e < \frac{\pi}{\ln(\pi)}.$$

Comme $x = e$ est un minimum pour f, *i.e.* $f(x) \geq f(e)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, cela est vraie en particulier pour $x = \pi$ et notre inégalité est bien vérifiée.

7
Plan d'étude d'une fonction numérique

Exercice 7.1

Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x + \ln(x^2-1) \end{aligned}$$

en précisant les points suivants :

1. ensemble de définition,
2. comportement aux extrémités de l'ensemble de définition et recherche d'asymptotes,
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations,
4. convexité, concavité,
5. graphe.

Correction

1. *Ensemble de définition :* il faut $x^2-1>0$ donc

$$\mathscr{D}_f =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[.$$

2. *Comportement aux extrémités de l'ensemble de définition :*

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x\left(1+\frac{\ln(x^2-1)}{x}\right) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} 1+\frac{\ln(x^2-1)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x)-x = \lim_{x\to\pm\infty} \ln(x^2-1) = +\infty.$$

Il n'y a pas d'asymptotes en $\pm\infty$.

3. *Extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations :* la dérivée de f est la fonction

$$\begin{aligned} f'\colon \mathscr{D}_f &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) = 1+\frac{2x}{x^2-1} = \frac{x^2+2x-1}{x^2-1} = \frac{(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})}{x^2-1} \end{aligned}$$

Dans $\mathscr{D}_f$ on a

$$\begin{aligned} &f'(x)>0 \text{ ssi } x\in]-\infty;-1-\sqrt{2}[\cup]1;+\infty[, \\ &f'(x)=0 \text{ ssi } x=-1-\sqrt{2}, \\ &f'(x)<0 \text{ ssi } x\in]-1-\sqrt{2};-1[. \end{aligned}$$

On conclut que

- ⋆ f est strictement croissante sur $]-\infty;-1-\sqrt{2}[$ et sur $]1;+\infty[$,
- ⋆ f est strictement décroissante sur $]-1-\sqrt{2};-1[$,
- ⋆ $x=-1-\sqrt{2}$ est un point de maximum local et on a $f(-1-\sqrt{2})=-1-\sqrt{2}+\ln(2+2\sqrt{2})$.

Le tableau des variations est alors le suivant :

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$				$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-1-\sqrt{2}+\ln(2+2\sqrt{2})$	$\searrow$	$-\infty$		$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4. *Convexité, concavité :* la dérivée seconde de f est La fonction

$$\begin{aligned} f'' \colon \mathscr{D}_f &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f''(x) = \left(1 + \frac{2x}{x^2-1}\right)' = \frac{2(x^2-1)-4x^2}{(x^2-1)^2} \end{aligned}$$

Dans $\mathscr{D}_f$ on a $f''(x) < 0$. On conclut que la fonction est concave séparément sur $]-\infty;-1[$ et sur $]1;+\infty[$.

5. *Graphe :* voir la figure 7.1

Exercice 7.2

Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{x^2}{\ln(x^2)-1} \end{aligned}$$

en répondant aux questions suivantes :

1. ensemble de définition,
2. comportement aux extrémités de l'ensemble de définition et recherche d'asymptotes,
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations,
4. graph.

Correction

La fonction est paire, *i.e.* $f(-x) = f(x)$: on étudie donc seulement la fonction f^+ restriction de f à $\mathbb{R}^+$.

1. *Ensemble de définition de f^+ :* il faut $\begin{cases} \ln(x^2)-1 \neq 0 \\ x^2 > 0 \end{cases}$ donc

$$\mathscr{D}_{f^+} =]0, \sqrt{e}[\cup]\sqrt{e}, +\infty[.$$

2. *Comportement de f^+ aux extrémités de l'ensemble de définition :*

$$\lim_{x\to 0^+} f^+(x) = 0^-, \qquad \lim_{x\to(\sqrt{e})^-} f^+(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to(\sqrt{e})^+} f^+(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f^+(x) = +\infty.$$

Puisque $\lim_{x\to+\infty} \frac{f^+(x)}{x} = +\infty$, il n'y a pas d'asymptotes en $+\infty$.

3. *Extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations de f^+ :* la dérivée de f^+ est la fonction

$$\begin{aligned} (f^+)' \colon \mathscr{D}_{f^+} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (f^+)'(x) = \frac{2x(2\ln(x)-1) - x^2\frac{2}{x}}{(2\ln(x)-1)^2} = 4\frac{x(\ln(x)-1)}{(2\ln(x)-1)^2} \end{aligned}$$

Dans $\mathscr{D}_{f^+}$ on a

$$\begin{aligned} &(f^+)'(x) > 0 \text{ ssi } x \in]e;+\infty[, \\ &(f^+)'(x) = 0 \text{ ssi } x = e, \\ &(f^+)'(x) < 0 \text{ ssi } x \in]0;\sqrt{e}[\cup]\sqrt{e};e[\end{aligned}$$

et $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$. On conclut que

- ⋆ f^+ est strictement croissante sur $]e;+\infty[$,

- ⋆ f^+ est strictement décroissante sur $]0;\sqrt{e}[$ et sur $]\sqrt{e};e[$,
- ⋆ $x=e$ est un point de minimum local et on a $f^+(e)=e^2$.

Le tableau des variations est alors le suivant :

x	0		$\sqrt{e}$		e		$+\infty$
$(f^+)'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f^+(x)$	0	$\searrow$	$-\infty \,\|\|\, +\infty$	$\searrow$	e^2	$\nearrow$	$+\infty$

4. *Graphe :* voir la figure 7.2

Exercice 7.3

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x)=\begin{cases} x^2\ln|x|, & \text{si } x\neq 0,\\ 0, & \text{si } x=0.\end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x\neq 0$, puis $f'(0)$.
3. Étudier la continuité de f' en 0.
4. Établir si f est de classe $\mathscr{C}^1$.
5. Calculer les limites de f aux extrémités de l'ensemble de définition et recherche les asymptotes.
6. Trouver les extrema locaux, sens de variation et tableau des variations.
7. Dresser le graphe de f.

Correction

La fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se réécrit

$$f(x)=\begin{cases} x^2\ln(x), & \text{si } x>0,\\ 0, & \text{si } x=0,\\ x^2\ln(-x), & \text{si } x<0.\end{cases}$$

1. f est continue en 0 car
$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x^2\ln|x|=0=f(0).$$
2. La dérivée de f est la fonction $f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par
$$f'(x)=\begin{cases} 2x\ln(x)+x, & \text{si } x>0,\\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0} x\ln|x|=0, & \text{si } x=0,\\ 2x\ln(-x)+x, & \text{si } x<0,\end{cases}$$
c'est-à-dire
$$f'(x)=\begin{cases} 2x\ln|x|+x, & \text{si } x\neq 0,\\ 0, & \text{si } x=0.\end{cases}$$
3. f' est continue en 0 car
$$\lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to 0} 2x\ln|x|+x=0=f'(0).$$
4. $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ car elle est clairement continue dans $\mathbb{R}$ (l'unique point délicat était 0 mais on a vu qu'elle y est continue) et de même pour sa dérivée première.
5. Limites de f aux extrémités de l'ensemble de définition :
$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=+\infty,$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty,$$
$$\lim_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty,$$
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty.$$
Il n'y a pas d'asymptotes en $\pm\infty$.

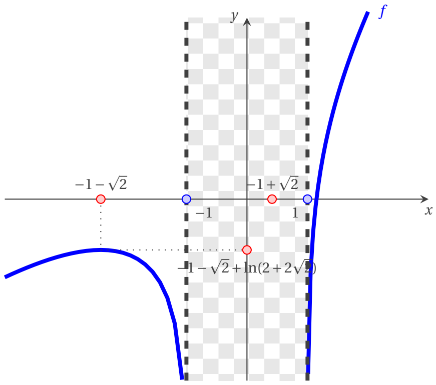


FIGURE 7.1 – Exercice 7.1

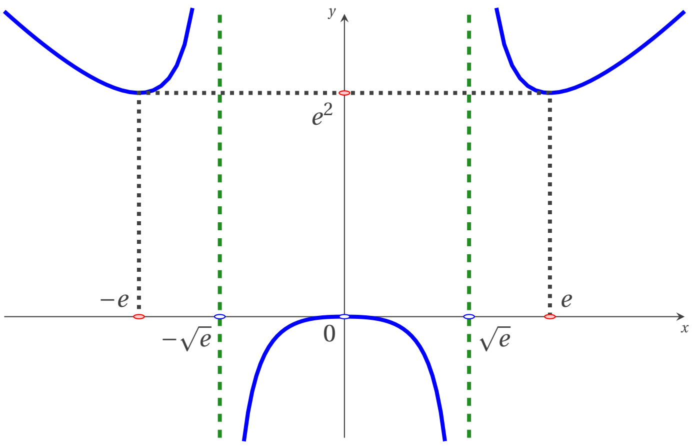


FIGURE 7.2 – Exercice 7.2

6. On a
   - ⋆ $f'(x) = 0$ ssi $x \in \left\{0, \pm\frac{1}{\sqrt{e}}\right\}$,
   - ⋆ $f'(x) > 0$ ssi $x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{e}}; 0\right[\cup \left]\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right[$,
   - ⋆ $f'(x) < 0$ ssi $x \in \left]-\infty; -\frac{1}{\sqrt{e}}\right[\cup \left]0; \frac{1}{\sqrt{e}}\right[$;

   donc
   - ⋆ f est croissante pour $x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{e}}; 0\right[$ et pour $x \in \left]\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right[$,
   - ⋆ f est décroissante pour $x \in \left]-\infty; -\frac{1}{\sqrt{e}}\right[$ et pour $x \in \left]0; \frac{1}{\sqrt{e}}\right[$,
   - ⋆ f a un maximun (locale) en $x = 0$ et $f(0) = 0$,
   - ⋆ f a un minimum (absolue) en $x = \pm\frac{1}{\sqrt{e}}$ et $f(\pm\frac{1}{\sqrt{e}}) = -\frac{1}{2e}$.

   Le tableau des variations est alors le suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{x}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{x}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{1}{2e}$	↗	0	↘	$-\frac{1}{2e}$	↗	$+\infty$

7. *Graphe :* voir la figure 7.3

Exercice 7.4

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 2x + \sqrt{x^2 + 2x - 2}.$$

1. Trouver l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Calculer les limites de f aux extrémités de l'ensemble de définition.
3. Calculer la dérivée $f'(x)$ de f, son ensemble de définition et étudier son signe.
4. En déduire le sens de variation de f et dresser le tableau de variation de f.
5. Établir le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ en $-\infty$ puis en $+\infty$ et préciser la position de la courbe représentative de f par rapport à ces asymptotes.
6. Tracer les asymptotes et l'allure de la courbe de f.

Correction

1. La fonction $\star \mapsto \sqrt{\star}$ n'est définie que si $\star \ge 0$ donc
$$\mathscr{D}_f = \left\{x \in \mathbb{R} \;:\; x^2 + 2x - 2 \ge 0\right\} = \left]-\infty; -1-\sqrt{3}\right] \cup \left[-1+\sqrt{3}; +\infty\right[.$$
2. Observons d'abord que $f(x) = 2x + \sqrt{x^2 + 2x - 2} = 2x + |x|\sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}}$ donc
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} 2x + \sqrt{x^2+2x-2} &= \lim_{x\to-\infty} x\left(2 - \sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}}\right) = -\infty,\\
\lim_{x\to-1-\sqrt{3}} 2x + \sqrt{x^2+2x-2} &= f(-1-\sqrt{3}) = -2-2\sqrt{3},\\
\lim_{x\to-1+\sqrt{3}} 2x + \sqrt{x^2+2x-2} &= f(-1+\sqrt{3}) = -2+2\sqrt{3},\\
\lim_{x\to+\infty} 2x + \sqrt{x^2+2x-2} &= \lim_{x\to+\infty} x\left(2 + \sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}}\right) = +\infty.
\end{aligned}$$
3. $f'(x) = 2 + \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-2}}$ donc $\mathscr{D}_{f'} = \mathscr{D}_f \setminus \{-1 \pm \sqrt{3}\}$ (car il faut exclure les $x \in \mathscr{D}_f$ qui annulent le dénominateur). Pour en étudier le signe on se rappelle que

	Solutions de l'équation $A(x) = \sqrt[n]{B(x)}$	Solutions de l'inégalité $A(x) > \sqrt[n]{B(x)}$	Solutions de l'inégalité $A(x) < \sqrt[n]{B(x)}$
Si n est impair	$(A(x))^n = B(x)$	$(A(x))^n > B(x)$	$(A(x))^n < B(x)$
Si n est pair	$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ (A(x))^n = B(x) \end{cases}$	$\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > 0 \\ (A(x))^n > B(x) \end{cases}$	$\begin{cases} A(x) < 0 \\ B(x) \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ (A(x))^n < B(x) \end{cases}$

donc

$$f'(x) = 0 \iff 2\sqrt{x^2+2x-2} + x + 1 = 0 \iff \underbrace{-\frac{x+1}{2}}_{A(x)} = \underbrace{\sqrt{x^2+2x-2}}_{\sqrt{B(x)}}$$

$$\iff \begin{cases} -\frac{x+1}{2} \geq 0, \\ x^2+2x+1 = 4x^2+8x-8, \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq -1, \\ x^2+2x-3 = 0, \end{cases} \iff x = -3$$

et

$$f'(x) > 0 \iff \frac{x+1+2\sqrt{x^2+2x-2}}{\sqrt{x^2+2x-2}} > 0 \iff x+1+2\sqrt{x^2+2x-2} > 0$$

$$\iff \underbrace{-\frac{x+1}{2}}_{A(x)} < \underbrace{\sqrt{x^2+2x-2}}_{\sqrt{B(x)}} \iff \begin{cases} -\frac{x+1}{2} < 0, \\ x^2+2x-2 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} -\frac{x+1}{2} \geq 0, \\ x^2+2x+1 < 4x^2+8x-8, \end{cases} \iff x > -1+\sqrt{3}.$$

4. Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-3		$-1-\sqrt{3}$		$-1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$				$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-5	$\searrow$	$-2-2\sqrt{3}$		$-2+2\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

5. On a

$$\frac{f(x)}{x} = \begin{cases} 2+\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}} & \text{si } x > 0, \\ 2-\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}} & \text{si } x < -1-\sqrt{3} \cup -1+\sqrt{3} \leq x < 0, \end{cases}$$

donc

- ⋆ le développement limité de $\frac{f(x)}{x}$ en $-\infty$ à l'ordre 2 est

$$g(t) = tf(1/t) = 2-\sqrt{1+2t-2t^2} = 2-1-\frac{\left(2t-2t^2\right)}{2}+\frac{\left(2t-2t^2\right)^2}{8}+o(t^2) = 1-t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)$$

  donc $1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o(x^{-2})$ est le développement limité de $f(x)/x$ en $-\infty$ à l'ordre 2. On conclut que $y = x-1$ est l'équation de l'asymptote oblique au graphe de f en $-\infty$; l'asymptote est en dessous de la courbe ;
- ⋆ le développement limité de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ à l'ordre 2 est

$$g(t) = tf(1/t) = 2+\sqrt{1+2t-2t^2} = 2+1+\frac{\left(2t-2t^2\right)}{2}-\frac{\left(2t-2t^2\right)^2}{8}+o(t^2) = 3+t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)$$

  donc $3+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o(x^{-2})$ est le développement limité de $f(x)/x$ en $+\infty$ à l'ordre 2. On conclut que $y = 3x+1$ est l'équation de l'asymptote oblique au graphe de f en $+\infty$; l'asymptote est au dessus de la courbe.

6. *Graphe :* voir la figure 7.4

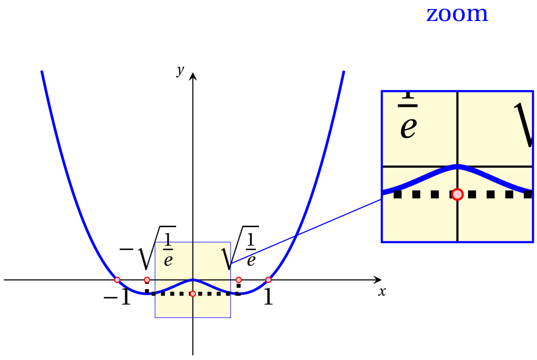


FIGURE 7.3 – Exercice 7.3

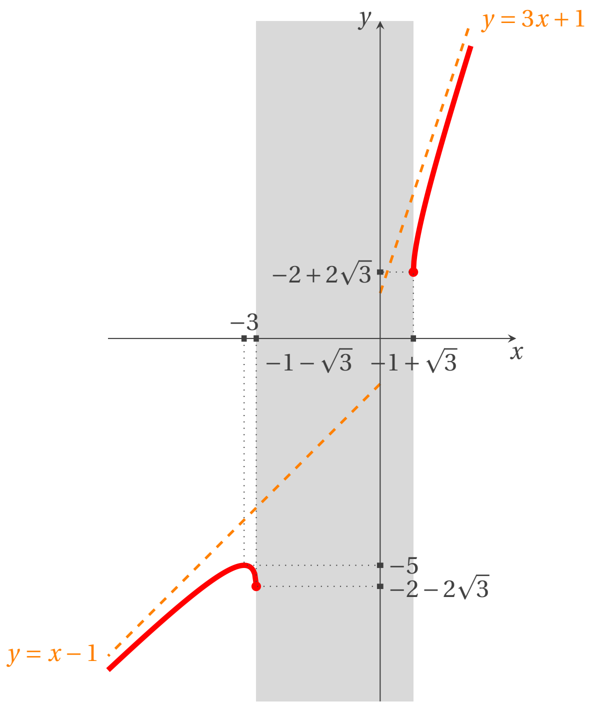


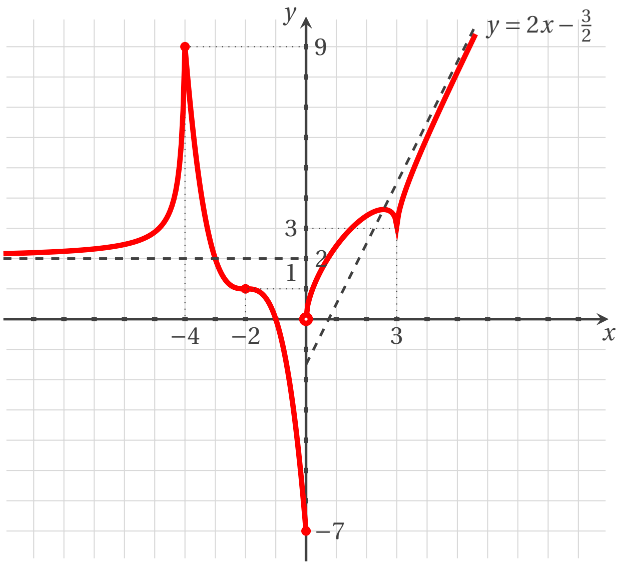
FIGURE 7.4 – Exercice 7.4

Exercice 7.5

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2 - \frac{7}{7x+27} & \text{si } x \leq -4, \\ 1-(x+2)^3 & \text{si } -4 < x \leq 0, \\ x + \sqrt{|x^2-3x|} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

dont le graphe est représenté dans la figure ci-dessous.



Pour la plupart des questions suivantes, il n'est pas nécessaire de faire des calculs mais il faut justifier la réponse :

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en $x = -4$, en $x = -2$, en $x = 0$ et en $x = 3$. Donner, lorsqu'il est possible, la valeur de f' en chacun de ces points.
3. Quelle est l'équation de la droite tangente au graphe de f en $x = -2$? Et en $x = 4$?
4. Quel est le signe de $f'(x)$ pour $x \in \mathscr{D}_{f'}$? Quel est le signe de $f''(x)$ pour $x \in \mathscr{D}_{f''}$?
5. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
6. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 2x$.

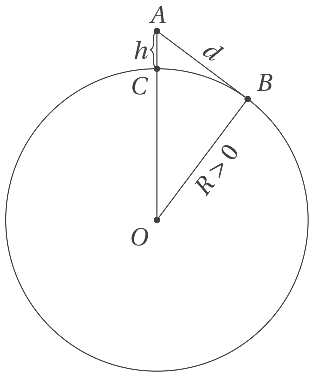
Correction

1. $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
2. Considérons chaque point séparément :
   - ⋆ f est continue en -4 et $f(-4) = 9$; elle n'est pas dérivable en $x = -4$ car $\lim\limits_{h\to0^-} \frac{f(-4+h)-f(-4)}{h} = \lim\limits_{h\to0^-} \frac{2-\frac{7}{7(h-4)+27}-9}{h} = \frac{49}{(55)^2}$ tandis que $\lim\limits_{h\to0^+} \frac{f(-4+h)-f(-4)}{h} = \lim\limits_{h\to0^+} \frac{1-(-4+h+2)^3-9}{h} = -12$;
   - ⋆ f est continue en -2 et $f(-2) = 1$; f est dérivable en -2 et $f'(-2) = 0$;
   - ⋆ f n'est pas continue en $x = 0$ car $f(0) = 1-(-4+2)^3 = -7$ mais $\lim\limits_{h\to0^+} f(x) = \lim\limits_{h\to0^+} x + \sqrt{|x^2-3x|} = 0$;
   - ⋆ f est continue en $x = 3$ et $f(3) = 3$; elle n'est pas dérivable en $x = 3$ car $\lim\limits_{h\to0^-} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim\limits_{h\to0^-} \frac{h+3+\sqrt{3(h+3)-(h+3)^2}}{h} = \lim\limits_{h\to0^-} \frac{h+3+\sqrt{-h(h+3)}}{h} = \infty$ et de même $\lim\limits_{h\to0^+} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim\limits_{h\to0^+} \frac{h+3+\sqrt{(h+3)^2-3(h+3)}}{h} = \lim\limits_{h\to0^+} \frac{h+3+\sqrt{h(h+3)}}{h} = \infty$.
3. L'équation de la droite tangente en x_0 au graphe d'une fonction f dérivable en x_0 est $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. Par conséquente l'équation de la droite tangente au graphe de f en $x = -2$ est $y = 1$ et en $x = 4$ est $y = f'(4)(x-4)+f(4) = \frac{9}{4}x - 3$.
4. $f'(x) = 0$ pour $x = -2$ et $x = \frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $f'(x)$ n'existe pas pour $x \in \{-4, 0, 3\}$, $f'(x) > 0$ pour $x \in \left]-\infty; -4\right[\cup \left]0; \frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right[\cup \left]3; +\infty\right[$ et $f'(x) < 0$ pour $x \in \left]-4; -2\right[\cup \left]-2; 0\right[\cup \left]\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right); 3\right[$.

5. $f''(x) = 0$ pour $x = -2$, $f''(x)$ n'existe pas pour $x \in \{-4, 0, 3\}$, $f''(x) > 0$ pour $x \in]-\infty; -4[\cup]-4; -2[$ et $f''(x) < 0$ pour $x \in]-2; 0[\cup]0; 3[\cup]3; +\infty[$.
6. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ donc $y = 1$ est asymptote en $-\infty$.
7. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = -\frac{3}{2}$.

Exercice 7.6

On veut déterminer la limite de visibilité d depuis un point d'altitude $h \geq 0$ au-dessus du niveau de la mer.



Du point A on voit jusqu'au point B ainsi

$$(R+h)^2 = R^2 + d^2$$

donc

$$d(h) = \sqrt{2Rh + h^2}.$$

Étudier cette limite de visibilité en fonction de h.
Exemples : Le rayon de la terre est $R \approx 6371$ km. Un adulte de $h = 1.80$ m voit jusqu'à $d(h) \approx 4.8$ km, un enfant de $h = 1$ m verra jusqu'à $d(h) \approx 3.6$ km. Depuis le sommet de la tour Eiffel $h = 273$ m, on voit jusqu'à $d(h) \approx 59$ km.

Correction

1. *Ensemble de définition :* il faut $2Rh + h^2 \geq 0$, *i.e.* $\mathscr{D}_d = \mathbb{R}^+$.
2. *Comportement aux extrémités de l'ensemble de définition :*

$$\lim_{h\to0^+} d(h) = d(0) = 0,$$
$$\lim_{h\to+\infty} d(h) = +\infty.$$

De plus

$$\frac{d(h)}{h} = \frac{h\sqrt{\frac{2R}{h}+1}}{h} = \sqrt{\frac{2R}{h}+1} \xrightarrow[h\to+\infty]{} 1$$

et

$$\lim_{h\to+\infty} d(h) - h = \lim_{h\to+\infty} h\left(\sqrt{\frac{2R}{h}+1} - 1\right) = \lim_{h\to+\infty} h\frac{\frac{2R}{h}+1-1}{\sqrt{\frac{2R}{h}+1}+1} = \lim_{h\to+\infty} \frac{2R}{\sqrt{\frac{2R}{h}+1}+1} = R.$$

On en déduit que la droite d'équation $y = h + R$ est l'asymptote de h en $+\infty$.

3. *Extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations :* la dérivée de d est la fonction

$$\begin{aligned} d' \colon \mathscr{D}_d &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto d'(h) = \frac{R+h}{\sqrt{2Rh+h^2}} \end{aligned}$$

Dans $\mathscr{D}_d^*$ on a $d'(h) > 0$ et $\lim_{h\to0^+} d'(h) = +\infty$ donc d est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. *Convexité, concavité :* la dérivée seconde de f est la fonction

$$\begin{aligned} d'' \colon \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ h &\mapsto d''(h) = \frac{-R^2}{(2Rh+h^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

On conclut que d est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

5. *Graphe :* voir la figure 7.5

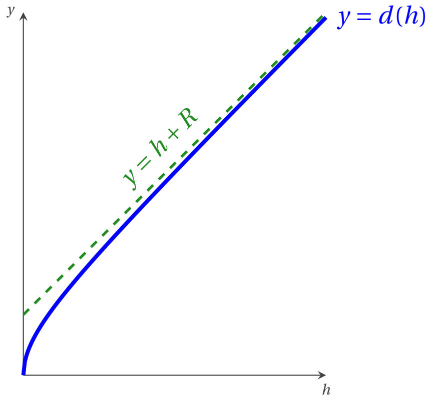


FIGURE 7.5 – Exercice 7.6

Correction