6 Méthodes de preuve

a preuve directe de $P \Rightarrow Q$:

La preuve directe de $P \Rightarrow Q$ consiste à supposer P (vraie) et à prouver que Q est vraie.

exemple : n impair $\Rightarrow$ n^2 impair

Soit n un nombre impair, alors il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$

On calcule $n^2 = (2k+1)^2$

$$= (2k)^2 + 2 \times 2k \times 1 + 1^2$$
$$= 4k^2 + 4k + 1$$
$$= 2(2k^2 + 2k) + 1$$

comme $2k^2 + 2k$ est un entier, on en déduit que n^2 est impair. CQFD.

(b) <u>preuve par contraposée de $P \Rightarrow Q$</u>

Cette preuve consiste en la preuve directe de la contraposée non(Q) $\Rightarrow$ non(P).

exemple : on prouve $\boxed{n^2 \text{ pair} \Rightarrow n \text{ pair}}$

La contraposée de cette proposition est :

n n'est pas pair $\Rightarrow$ n^2 n'est pas pair

c'est-à-dire :

n impair $\Rightarrow$ n^2 impair

on sait que c'est vrai ! CQFD.

© <u>Preuve par l'absurde</u>

Pour prouver P, on suppose que P est Fausse et on en conclut une absurdité.

<u>Exemple</u> $\sqrt{2}$ est irrationnel.

On le prouve par l'absurde :

on suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel

donc $\sqrt{2} = \frac{n}{d}$ avec n et d entiers.

On suppose que n et d sont premiers entre eux.

Alors : $n = \sqrt{2}\, d$

donc $n^2 = 2 d^2$

donc n^2 est pair, donc n est pair !

donc il existe un entier k tel que

$$n = 2k.$$

Donc $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$

donc $4k^2 = 2d^2$

donc $d^2 = 2k^2$

donc d^2 est pair, donc d est pair !

Donc n et d sont pairs, c'est une contradiction ! CQFD.

d) Preuve par récurrence

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme c et de raison q :

$$\begin{cases} x_0 = c \\ \forall n \geq 0, \quad x_{n+1} = q\, x_n \end{cases}$$

Alors on a : $\boxed{\forall n \geq 0, \quad x_n = c \cdot q^n}$

Preuve : On prouve par récurrence sur $n \geq 0$ de la propriété

$$P_n : x_n = c\, q^n$$

Initialisation on prouve P_0 :

pour $n = 0$: $x_0 = c$ par hypo.

$c \cdot q^0 = c \cdot 1 = c$

donc $x_0 = c = c \cdot q^0$ donc P_0 est V.

Hérédité soit $n \geqslant 0$, on suppose P_n vraie et on prouve P_{n+1} :

comme P_n est vraie, on a ; $x_n = c q^n$

donc $x_{n+1} \underset{\text{déf.}}{=} q \times x_n = q \cdot c q^n$

$= c \cdot q^1 \cdot q^n = c \cdot q^{n+1}$

donc P_{n+1} est vraie. CQFD.

7 Lien avec la théorie des ensembles

- "$x \in X$" se lit "x appartient à X" ou "x dans X" et signifie que x est un élément de X
- $x \notin X \equiv$ non $(x \in X)$ signifie que x n'est pas dans X.
- $\emptyset$ est l'ensemble vide : il n'a pas d'élément.

Notions de logique et théorie des ensembles

par convention : $\exists x \in \phi,\ P(x)$ est F

$\forall x \in \phi,\ P(x)$ est V.

- soit A et B deux ensembles

- inclusion : $A \subset B \equiv \forall x \in A,\ x \in B$

$A \subset B \equiv x \in A \Rightarrow x \in B$

remarque : $\forall x \in \phi,\ x \in A$ est vrai

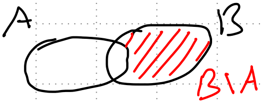
donc $\phi \subset A$.

- égalité : $A = B \equiv A \subset B$ et $B \subset A$

Notions de logique et théorie des ensembles

$$A = B \equiv x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

- complémentaire de A dans B :



$$x \in B \setminus A \Leftrightarrow x \in B \text{ et } x \notin A$$

$B \setminus A$ est aussi noté $\complement_B A$ ou $\overline{A}^B$

- intersection :

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B$$

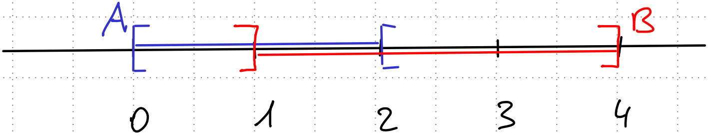
- réunion :

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B$$

Notions de logique et théorie des ensembles

Exemple : $A = [0, 2[$, $B =]1, 4]$

identifier $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$



$A \cap B =]1, 2[$ $\qquad$ $A \setminus B = [0, 1]$

$A \cup B = [0, 4]$ $\qquad$ $B \setminus A = [2, 4]$

- le produit cartésien de A et B est l'ensemble noté $A \times B$ dont les éléments sont les couples (a, b) où $a \in A$ et $b \in B$:

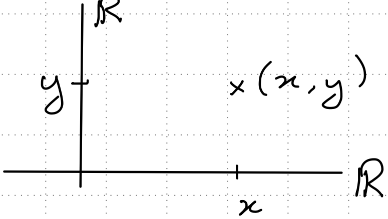
$$A \times B = \{ (a, b) : a \in A, b \in B \}$$

exemple classique : cas $A = B = \mathbb{R}$

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \underset{\text{notation}}{=} \mathbb{R}^2 = \{ (x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \}$$

on représente cet ensemble par le

plan cartésien :



(8) Notions de majorant, minorant ...

Def soit E et F deux ensembles de réels, on suppose que E est inclus dans F.

- Un <u>minorant</u> de F dans E est un élément e de E tel que :

$$\forall f \in F \,, \quad e \leq f \,.$$

- Un <u>majorant</u> de F dans E est un élément de E tel que :

$$\forall f \in F \,, \quad f \leq e \,.$$

- si f est un minorant de F dans F, alors c'est le <u>minimum de F</u>, on le note $\min(F)$
- si f est un majorant de F dans F, alors c'est le <u>maximum de F</u>, on le note $\max(F)$

Notions de logique et théorie des ensembles

exemple : $F = [0,1[$ et $E = \mathbb{R}$

$1/2$ n'est ni un majorant, ni un minorant

2 est un majorant de F

-1 est un minorant de F

π est un majorant

0 est le minimum de F

1 est un majorant de F (pas le max !)

def la borne inférieure de F est le maximum des minorants de F.

Elle est notée $\inf F$.

la borne supérieure de F est le minimum des majorants de F.
Elle est notée sup F.

exemple : $\inf [0,1[= \max]-\infty, 0] = 0$

$\sup [0,1[= \min [1, +\infty[= 1$.