Def Soit F un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ (ou partie de $\mathbb{R}$), alors :

- la borne inférieure de F est le maximum des minorants de F, noté $\inf F$
- la borne supérieure de F est le minimum des majorants de F, noté $\sup F$

exemple : $F = [0, 1[$

alors :

- F a 0 pour minimum, mais n'a pas de maximum
- l'ensemble des minorants de F est

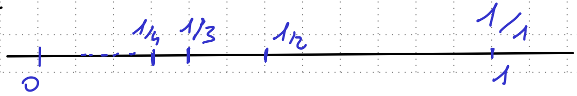
est $\underline{M} =]-\infty, 0]$ dont le maximum est 0, donc $\inf F = 0$

- l'ensemble des majorants de F est $\overline{M} = [1, +\infty[$, dont le minimum est 1, donc $\sup F = 1$

exemple : $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$, $\inf \mathbb{R} = -\infty$
$\sup \mathbb{R} = +\infty$

exemple :

$$\inf \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} = 0$$



Fonctions numériques usuelles

Déf Une fonction numérique est un procédé noté f, qui à tout élément x de la partie $\mathcal{D}_f$ de $\mathbb{R}$ associe un unique réel noté $f(x)$. On écrit

$$f : \mathbb{R} \text{ ou } \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x)$$

ici $\mathcal{D}_f$ est l'ensemble de définition de f.

exemple : • pour a et b des réels fixés, on peut définir la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$

si $b = 0$, on parle de fonction linéaire.

- la fonction valeur absolue :

$$f : x \mapsto |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

- la fonction inverse :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x} \quad , \text{ ici } \mathcal{D}_f = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

- la fonction partie entière :

$E : x \mapsto n$ où $n \in \mathbb{Z}$ est tel que
$n \leq x < n+1$.

ici $\mathcal{D}_E = \mathbb{R}$, parfois on note $E(x) = \lfloor x \rfloor$

exemples : $E(1) = 1$

$E(-1) = -1$ car $-1 \leq -1 < -1+1 = 0$

$E(1,2) = 1$ car $1 \leq 1,2 < 2$

$E(2,9) = 2$ car $2 \leq 2,9 < 3$

$E(-2,9) = -3$ car $-3 \leq -2,9 < -2$

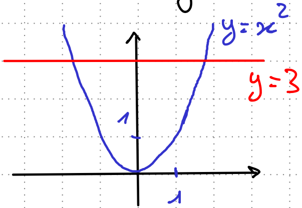
$E(\pi) = 3$

déf Le graphe de f (ou courbe représentative de f) est l'ensemble des couples $(x, f(x))$ pour x dans $\mathcal{D}_f$:

$$\text{graph}(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathcal{D}_f\}$$

et l'équation $y = f(x)$ est l'équation cartésienne de f.

<u>exemple</u> :



on a tracé les graphes de :

$f : x \longmapsto x^2$

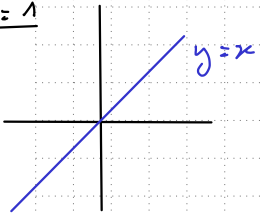
$g : x \longmapsto 3$

<u>def</u> (fonctions puissance entière)

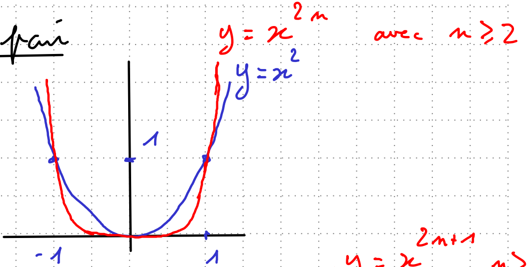
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction "puissance n" est la fonction $x \longmapsto x^n = \underbrace{x \times x \times \dots \times x}_{n \text{ fois}}$

allure des graphes :

$n = 1$

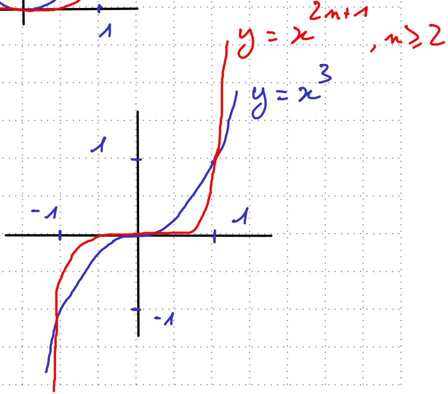


n pair



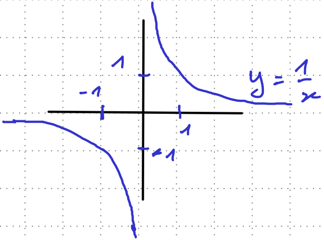
n impair

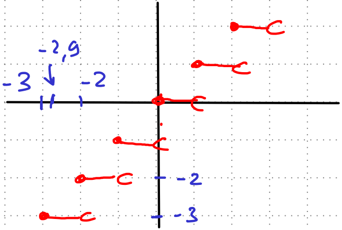
$n \neq 1$



Exemples de graphe :

$f : x \mapsto \frac{1}{x}$ $\qquad$ $f : x \mapsto E(x)$





def Soit A un sous-ensemble de $\mathcal{D}_f$, la restriction de f à A est la fonction notée $f|_A$ dont l'ensemble de définition est A et telle que :

$$f_{|A} : \begin{array}{l} A \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f_{|A}(x) = f(x). \end{array}$$

exemple : $f : x \mapsto |x|$

alors $f_{|\mathbb{R}_+} : x \mapsto x$ et $f_{|\mathbb{R}_-} : x \mapsto -x$

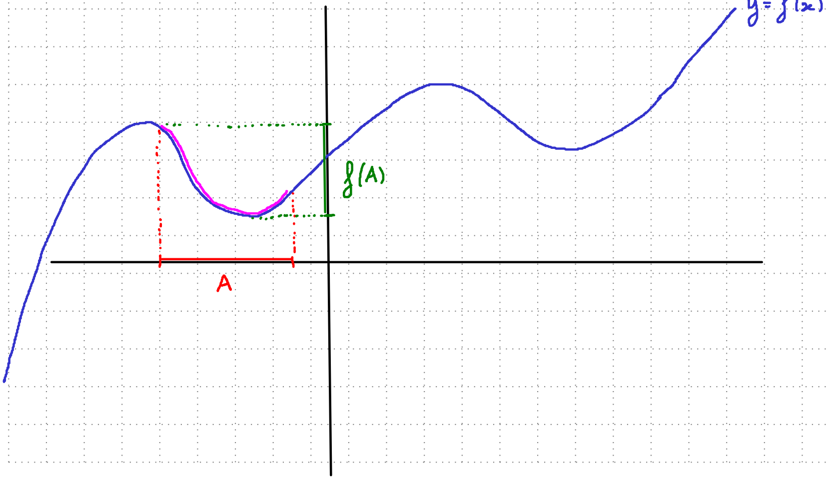
① Image directe, image réciproque

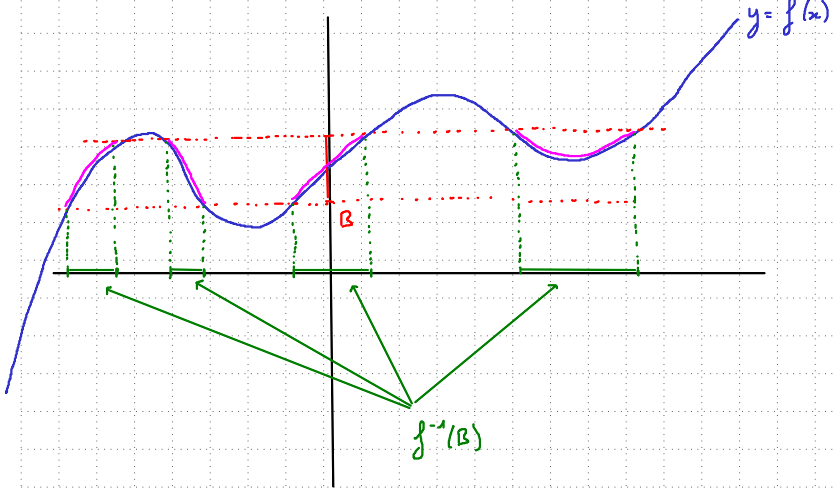
def Soit A une partie de $\mathcal{D}_f$, l'image directe de A par f est

$$f(A) = \{ f(x) : x \in A \}$$

Soit $\mathcal{B}$ une partie de $\mathbb{R}$, l'image réciproque de B par f est :

$$f^{-1}(B) = \{ x \in \mathbb{R} : f(x) \in B \}$$





$y = f(x)$
B
$f^{-1}(B)$

ex :

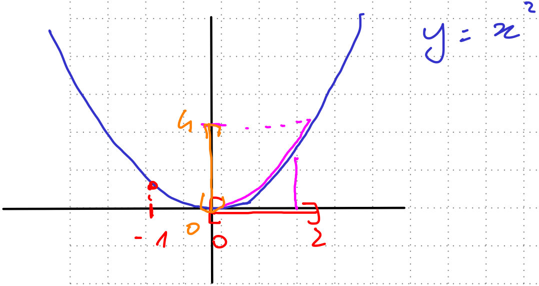
$$f : x \mapsto x^2$$

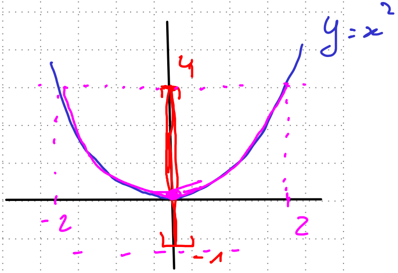
$$f([0,2]) = [0,4]$$

$$f(]-1,2]) = [0,4]$$

$$f^{-1}(]-1,4]) = [-2,2]$$

$$f^{-1}(]2,4]) = [-2,-\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2},2].$$





Def La composée de f par g est la fonction définie sur $f^{-1}(\mathcal{D}_g)$ par

$$x \longmapsto g\circ f(x) = g(f(x))$$

schéma : $g\circ f$: $x \xmapsto{g\circ f} g(f(x))$

$$x \underset{f}{\longmapsto} f(x) \underset{g}{\longmapsto} g(f(x))$$

exemple : $f : x \mapsto x^2$, $g : x \mapsto x+1$

$$g\circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2+1.$$

$$f\circ g(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2$$

$$= x^2+2x+1.$$