M11 - M15 – Mathématiques 1

Thierry Champion

Laboratoire IMATH, Université de Toulon

bureau M141 (batiment M)
champion@univ-tln.fr

Plan du cours

On abordera les points suivants

- éléments de logique et théorie des ensembles ;
- fonctions numériques usuelles ;
- suites numériques ;
- étude des fonctions numériques.

L'adresse de la page associée :

http://champion.univ-tln.fr/enseignement/mathematiques-1/mathematiques-1.html

Plan du cours

Quelques conseils

- Participer aux enseignements :
  - écoute et prise de notes actives en Cours et TD
  - poser des questions
  - intéragir avec vos camarades (sur le sujet traité !)
  - pas de téléphone, tablette, ordinateur, ...
- Prise de notes écrites
- Travailler en dehors des cours et TD

$$\begin{cases} \boxed{x} - y - z = 3 \\ 2x + 3y + 2z = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - y - z = 3 \\ 5y + 4z = -5 \\ 3y + 2\boxed{z} = -3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - y - z = 3 \\ 3y + 2\boxed{z} = -3 & L_3 \\ 5y + 4z = -5 & L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 3 \\ 3y + 2z = -3 \\ (5-6)y + 0 = 6-5 \end{cases} \qquad L_3 - 2L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 3 \\ 3y + 2z = -3 \\ -y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ z = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

3 Equivalence logique

Def Deux propositions P et Q sont logiquement équivalentes, noté $P \equiv Q$, si P est vraie lorsque Q est vraie et P est fausse lorsque Q est fausse.

Remarque : $P \Leftrightarrow Q$ se lit "P et Q sont équivalentes"

$P \equiv Q$ se lit "P et Q sont logiquement équivalentes".

Notions de logique et théorie des ensembles

Exemples : (1) Double négation : non(non P) $\equiv$ P

preuve :

P	non(P)	non(non(P))
V	F	V
F	V	F

(2) non (P et Q) $\equiv$ non(P) ou non(Q)

car :

P	Q	P et Q	non (P et Q)	non (P)	non(Q)	non(P) ou non(Q)
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

(3) non (P ou Q) $\equiv$ non(P) et non(Q)

(4) P et $(Q$ ou $R)$ $\equiv$ $(P$ et $Q)$ ou $(P$ et $R)$

(5) P ou $(Q$ et $R)$ $\equiv$ $(P$ ou $Q)$ et $(P$ ou $R)$

(6) $P \Leftrightarrow Q$ $\equiv$ $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$

en particulier, $P \Leftrightarrow Q$ peut aussi se lire :
"P est nécessaire et suffisante pour Q".

(7) implication : $P \Rightarrow Q$ $\equiv$ non(P) ou Q

(8) ________ : $P \Rightarrow Q$ $\equiv$ $\underbrace{\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)}_{\text{contraposée de } P \Rightarrow Q}$

exemple : "$\underbrace{\text{si}}_{}$ $\underbrace{\text{on veut}}_{P}$ $\underbrace{\text{alors}}_{\Rightarrow}$ $\underbrace{\text{on peut}}_{Q}$"

contraposée : "si on ne peut pas alors on ne veut pas".

Notions de logique et théorie des ensembles

remarque : preuve de ⑧ avec ce qui précède :

$$\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P) \underset{⑦}{\equiv} \text{non}(\text{non}\, Q) \text{ ou } \text{non}(P)$$

$$\underset{①}{\equiv} Q \text{ ou } \text{non}(P) \underset{⑦}{\equiv} P \Rightarrow Q.$$

⑨ Négation de $\Rightarrow$: $\text{non}(P \Rightarrow Q) \equiv P \text{ et } \text{non}(Q)$

exemple : non ($\underbrace{\text{si}}$ $\underbrace{\text{on veut}}_{P}$ $\underbrace{\text{alors}}_{\Rightarrow}$ $\underbrace{\text{on peut}}_{Q}$)

$\equiv$ $\underbrace{\text{on veut}}_{P}$ et $\underbrace{\text{on ne peut pas}}_{\text{non}(Q)}$

Notions de logique et théorie des ensembles

4) Quantificateurs

Def Soit $P(x)$ une proposition dépendant de x.
Le quantificateur existentiel, noté $\exists$, permet de former la proposition : $\exists x \in X, \quad P(x)$
qui est vraie si $P(x)$ est vraie pour au moins une valeur x dans X, et fausse sinon.

lecture : " $\exists x \in X, \quad P(x)$ " se lit " il existe x dans X tel que $P(x)$ ".

exemple : $\exists x \in \mathbb{R}, \quad x^2 = 0$ V car $x = 0$ vérifie $0^2 = 0$

$\exists x \in \mathbb{R}, \quad x^2 = 1$ V par exemple pour $x = 1$ ou $x = -1$

$\exists x \in \mathbb{R}, \quad x^2 = -1$ Faux

Notions de logique et théorie des ensembles

Déf Le quantificateur universel, noté $\forall$, permet de former la proposition : " $\forall x \in X, \quad P(x)$ " qui est V si $P(x)$ est vraie pour tous les éléments x de X, F sinon.

lecture : " $\forall x \in X, \quad P(x)$ " se lit "(Quel que soit / Pour tout) x dans X, on a $P(x)$"

exemple : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geq 0$ V

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 > 0$ F à cause de $x = 0$.

formule du binôme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Notions de logique et théorie des ensembles

Remarque : "$\exists$" est le "E" de "il Existe" à l'envers
"$\forall$" est le "A" de "for All" à l'envers

Manipulation :

* $[\forall x \in X, \forall y \in Y, \quad P(x,y)] \equiv [\forall y \in Y, \forall x \in X, \quad P(x,y)]$

on écrit parfois :

$\forall x \in X, \forall y \in X, \quad P(x,y) \equiv \forall x,y \in X, \quad P(x,y)$

* $\exists x \in X, \exists y \in Y, \quad P(x,y) \equiv \exists y \in Y, \exists x \in X, \quad P(x,y)$

* négation : $\quad$ non $(\exists x \in X, P(x)) \equiv \forall x \in X, \text{ non } P(x)$

non $(\forall x \in X, P(x)) \equiv \exists x \in X, \text{ non } P(x)$

Notions de logique et théorie des ensembles

exemple : ① non $(\forall x \in \mathbb{R}, \ x^2 \geq 0)$

est : $\exists x \in \mathbb{R}, \ x^2 < 0$

② non $(\forall x \geq 0, \ x^2 + 2x \geq 1)$

est : $\exists x \geq 0, \ x^2 + 2x < 1$

en effet "$x \geq 0$" peut se réécrire "$x \in \mathbb{R}_+$"

ou "$x \in [0, +\infty[$"

Attention $\forall x \in X, \exists y \in Y, \ P(x,y) \neq \exists y \in Y, \forall x \in X, \ P(x,y)$

exemple : $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, \ x = y - 1$ $\quad (P)$

Notions de logique et théorie des ensembles

n'est pas logiquement équivalent à :

$$\exists y \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{N},\quad x = y - 1 \qquad (Q)$$

ici P est vraie car si x est un entier, alors $y = x+1$ est aussi un entier tel que $x = y - 1$.

mais Q est fausse car si un tel y existe dans $\mathbb{N}$ alors pour $x = y$ on ne peut pas avoir $x = y - 1$.