Université de Toulon

M1 MEEF Mathématiques

TD 3 - Variables aléatoires discrètes

Le cours

- **Applications mesurables.** Soient $(\Omega,\, \mathfrak{F})$ et $(\Omega',\, \mathfrak{F}')$ deux espaces mesurables. Une application f de $(\Omega,\, \mathfrak{F})$ dans $(\Omega',\, \mathfrak{F}')$ est mesurable si $f^{-1}(\mathfrak{F}') := \{f^{-1}(B),\, B \in \mathfrak{F}'\} \subset \mathfrak{F}$.
  Dans le cas particulier où $(\Omega',\, \mathfrak{F}') = (\mathbb{R}^d,\, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ étant la tribu de Borel (i.e. la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^d$), on dit que f est *borélienne.*
  Remarques : Dans la suite, on se restreindra toujours aux deux cas particuliers suivants :
  — Ω' est fini ou dénombrable et $\mathfrak{F}' = \mathcal{P}(\Omega')$, ensemble des parties de Ω'.
  — $\Omega' = \mathbb{R}^d$ et $\mathfrak{F}' = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est la tribu de Borel sur $\mathbb{R}^d$.
- **Variables aléatoires.** Toute application mesurable définie sur un espace de probabilité $(\Omega,\, \mathfrak{F},\, \mathrm{P})$ est appelée *variable aléatoire*. Une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ est appelée *variable aléatoire réelle*. Une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est appelée *vecteur aléatoire*.
  Les variables aléatoires sont usuellement notées X, Y, Z, T, U.
- **Variable aléatoire discrètes.** Soit $(\Omega,\, \mathfrak{F},\, \mathrm{P})$ un espace mesurable, et soit X une variable aléatoire sur $(\Omega,\, \mathfrak{F},\, \mathrm{P})$ à valeurs dans $(\Omega',\, \mathfrak{F}')$. On dit que X est une *variable aléatoire discrète* s'il existe un sous-ensemble B' de Ω' tel que B' soit dénombrable et $\mathrm{P}(X^{-1}(B')) = \mathrm{P}_X(B') = 1$. Dans ce cas, on considère $(B', \mathcal{P}(B'))$ comme espace mesurable d'arrivée plutôt que $(\Omega',\, \mathfrak{F}')$ (quitte à restreindre l'application X).
- **Loi d'une variable aléatoire discrète.** Soit X une variable aléatoire discrète, et soit $X(\Omega) = \{a_i\}_{i\in I}$, I au plus dénombrable. La loi P_X de la variable aléatoire X est définie sur $(\Omega', \mathfrak{F}')$ par

$$\mathrm{P}_X(B) := \mathrm{P}(X^{-1}(B)) = \mathrm{P}(X \in B),\; B \in \mathfrak{F}'\,.$$

  P_X est aussi appelée *probabilité image de* X.
  La loi P_X de X est entièrement déterminée si on connait toutes les valeurs $\mathrm{P}_X(a_i)$ pour $i \in I$ (le montrer).
  Notations : On pose $[X = a_i] := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a_i\} = X^{-1}(\{a_i\})$.
- **Espérance, variance.** Soit X une variabe aléatoire réelle discrète. Alors on définit l'espérance et la variance de X par

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{x\in X(\Omega)} x\,\mathrm{P}_X(x) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\,\mathrm{P}\left([X=x]\right)\\
\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}((X-\mathrm{E}(X))^2) &= \sum_{x\in X(\Omega)} (x-\mathrm{E}(X))^2\,\mathrm{P}\left([X=x]\right)\\
&= \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 = \left(\sum_{x\in X(\Omega)} x^2\,\mathrm{P}\left([X=x]\right)\right) - (\mathrm{E}(X))^2\,,
\end{aligned}$$

quand les sommes sont **absolument convergentes**. Plus généralement, si f est une fonction numérique :

$$\mathrm{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\,\mathrm{P}\left([X = x]\right) ,$$

si la somme est absolument convergente.
L'espérance est linéaire : si X et Y sont des v.a. discrètes admettant une espérance, alors

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{E}(\alpha X + \beta Y) = \alpha \mathrm{E}(X) + \beta \mathrm{E}(Y)\,.$$

Ce n'est pas le cas pour la variance. Par exemple si $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $\mathrm{Var}(\alpha\, X) = \alpha^2 \mathrm{Var}(X)$.

- **Indépendance de variables aléatoires.** Soient X_1, X_2, ..., X_n, n variables aléatoires réelles sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathrm{P})$. On dit que X_1, X_2, ..., X_n sont indépendantes si, quels que soient B_1, B_2, ... B_n éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a

$$\mathrm{P}(X_1 \in B_1,\, X_2 \in B_2, \cdots, X_n \in B_n) = \mathrm{P}(X_1 \in B_1)\,\mathrm{P}(X_2 \in B_2) \cdots \mathrm{P}(X_n \in B_n)\,.$$

Si X_1, X_2, ..., X_n indépendantes, alors $g_1(X_1)$, $g_2(X_2)$, ... $g_n(X_n)$ sont aussi indépendantes, pour toutes fonctions boréliennes g_1, g_2, ..., g_n.
Propriété : si X_1 et X_2 sont indépendantes et admettent une espérance, alors $\mathrm{E}(X_1\, X_2) = \mathrm{E}(X_1)\mathrm{E}(X_2)$. (Le montrer dans le cas discret). En particulier, si X_1 et X_2 sont indépendantes et admettent une variance alors $\mathrm{Var}(X_1 + X_2) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2)$.

- **Fonction génératrice.** On appelle fonction génératrice d'une variable aléatoire discrète *à valeurs entières* (i.e. $X(\Omega) \in \mathbb{N}$), la fonction g_X définie par

$$g_X(t) = \mathrm{E}(t^X) = \sum_{i \in \mathbb{N}} t^i\, \mathrm{P}(X = i)\,.$$

Le domaine de définition de g_X contient $[-1,\, 1]$.
La fonction g_X est une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{P}(X = n) = g_X^{(n)}(0)/n!$. On a aussi, si $\mathrm{E}(X^n)$ bien définie,

$$\mathrm{E}(X(X-1)(X-2)\cdots(X-n+1)) = \lim_{t \to 1^-} g_X^{(n)}(t)\,.$$

Si deux variables aléatoires positives ont la même fonction génératrice, alors elles ont même loi.

- **Lois de probabilité discrètes usuelles.**
  — <u>Loi de Bernoulli</u> (pile ou face) : on appelle variable aléatoire de Bernoulli, une variable aléatoire X qui prend les valeurs 1 et 0 avec probabilités respectives p et $1-p$, ($p \in]0, 1[$). On a $\mathrm{E}(X) = p$ et $\mathrm{Var}(X) = p(1-p)$.
  — <u>Loi binomiale :</u> Soit $p \in [0,\, 1]$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p si $X(\omega) = \{0,\, 1,\, \cdots, n\}$ et

$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k \in \{0,\, 1,\, \cdots, n\}\,.$$

  Une variable aléatoire binomiale peut être vue comme la somme de n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes. On a $\mathrm{E}(X) = np$ et $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$.

— Loi hypergéométrique (tirages sans remises) : Soient N et n deux entiers, et $p \in [0, 1]$ tels que $pN \in \mathbb{N}$ et $N \geq n$. Une variable aléatoire X suit la loi hypergéométrique de paramètres N, n et p si $X(\Omega) = \{0, 1, ..., n\}$ et

$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad k \in \{0, 1, ..., n\}.$$

Si une urne contient N boules dont M vertes, et que l'on prend au hasard n boules dans l'urne (sans remise), la variable aléatoire X qui donne le nombre de boules vertes présentes dans les n boules tirées suit une loi hypergéométrique de paramètres N, n et $p = M/N$.
On a $\mathrm{E}(X) = np$ et $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$.

— Loi géométrique : Une variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre p si $X(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et si $\mathrm{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. C'est la loi de probabilité associée au premier temps de réussite (obtenir 1) dans une séquence (infinie) d'expériences aléatoires de Bernoulli de même paramètre p (cf. exercice 15). On a $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{p}$ et $\mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

— Loi de Poisson : Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et

$$\mathrm{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

On a $\mathrm{E}(X) = \lambda$ et $\mathrm{Var}(X) = \lambda$.

Les exercices

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire discrète.

Montrer $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2$, et pour tous réels a et b, $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\mathrm{Var}(X)$.

Si X est une variable aléatoire constante égale à a, montrer que $\mathrm{E}(X) = a$ et $\mathrm{Var}(X) = 0$.

Soit X une variable aléatoire (presque sûrement) positive ou nulle. Démontrer l'**inégalité de Markov** : pour tout $a > 0$,

$$\mathrm{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathrm{E}(X)}{a}.$$

En déduire l'**inégalité de Bienaymé-Tchebychev** : Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance alors, pour tout $a > 0$,

$$\mathrm{P}(|X - \mathrm{E}(X)| \geq a) \leq \frac{1}{a^2}\mathrm{Var}(X).$$

Exercice 2. On tire n boules d'une urne contenant N boules dont M blanches. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues. Donner la loi de X (on distinguera le cas avec remise et le cas sans remise).

Exercice 3. Un forain fait tourner devant un index une roue à dix-huit numéros équiprobables. Lorsque la roue s'arrête le numéro repéré par l'index est déclaré gagnant.

Un personne achète deux billets et constate qu'ils portent des numéros différents. Elle hésite entre jouer deux parties (une avec chaque billet) ou une seule partie (en misant les deux billets en même temps).

1. Modéliser chacune des deux épreuves. Quelle est, avec chaque stratégie, la possibilité de gagner ?
2. Cette personne décide de tenir compte des gains qu'elle pourrait réaliser dans l'une et l'autre stratégie. Sachant qu'un billet coute 1 euro et que l'on touche 10 euros lorsque l'on gagne, imaginer son calcul.
   Conclure.

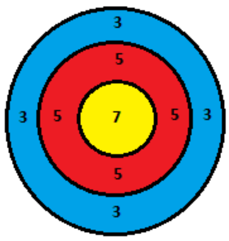
Exercice 4. Un forain possède deux roues, chacune étant séparée en 10 secteurs égaux. Sur la première roue, il y a 3 secteurs rouges et 7 blancs ; sur la deuxième 1 vert et 9 blancs. Les gains sont distribués de la façon suivante :

— Si les deux roues tombent sur les secteurs rouge et vert, le joueur reçoit 3 euros.
— Si une seule des deux roues exactement tombe sur un secteur blanc, le joueur reçoit 1 euro.
— Si les deux roues tombent sur le secteur blanc, le joueur reçoit 0,5 euro.

Déterminer la mise minimale que doit exiger le forain pour que son bénéfice moyen (espérance de gain) soit d'au moins 25 centimes par partie

Exercice 5 (Extrait de “ Odyssée 1ère S, Mathématiques, éditions Hatier ”)**.** Sur un stand de tir, on propose la cible ci-contre. Les rayons des cercles sont de 3, 6 et 9 cm. Le disque central est jaune, la couronne du milieu est rouge et la couronne extérieure est bleue.

Un compétiteur a une probabilité de 10% de rater sa cible. La probabilité de toucher une



zone de la cible est proportionnelle à la surface de la zone touchée.

1. Montrer que la probabilité de toucher la zone jaune est 10%.
2. On note X la variable aléatoire donnant le score du tireur.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Calculer $\mathrm{E}(X)$ et $\sigma(X)$.
3. Un tireur tire deux fois. On note Y la variable aléatoire donnant le score du tireur.
   — Déterminer la loi de probabilité de Y.
   — Calculer $E(Y)$ et $\sigma(Y)$.
   Peut-on conjecturer un lien entre les paramètres de X et Y.

Exercice 6. Un examen se déroule sous forme d'un questionnaire à choix multiple constitué de 20 questions. Chaque question comporte quatre réponses possibles, dont une seule est la bonne. Une réponse juste compte 1 point, une réponse fausse compte 0 point. On suppose que le programme de l'examen comporte 100 questions à étudier, dont on tirera aléatoirement les 20 de l'examen.

On suppose qu'un candidat n'étudie qu'une portion p de ces questions. On pourra donc supposer que $100p$ est un entier. On supposera aussi que si le candidat tombe sur une des questions qu'il a étudiées, il répond sans se tromper.
i) Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de questions qu'il a étudiées qui sont choisies parmi les 20 questions. Déterminer la loi de X.
ii) Si $X = m$ est fixé, quelle est la loi du nombre de bonnes réponses données aux $20 - m$ questions que le candidat n'a pas étudiées, si on suppose qu'il répond au hasard.
iii) Déterminer la loi de N, note du candidat. (On donnera l'expression de $P(N = n)$ sans chercher à la simplifier). Calculer l'espérance de N.

Exercice 7. Une compagnie de transport désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes. Cette compagnie effectue une étude basée sur 2 trajets par jour pendant les 20 jours ouvrables d'un mois, soit au total 40 trajets. On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à p

Un trajet coûte 10 euros ; en cas de fraude, l'amende est de 100 euros. Daphnis fraude systématiquement lors des 40 trajets étudiés. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de trajets où Daphnis a été contrôlé.

1) On suppose que $p = 0,05$

a.) Calculer à 10^{-4} près la probabilité que Daphnis soit contrôlé au plus 2 fois.

b.) Soit Z la variable aléatoire donnant le gain algébrique réalisé par Daphnis. Calculer $\mathrm{E}(Z)$.

2) On ne connaît plus la valeur de p.

Pour quelles valeurs de p la fraude systématique est-elle favorable à Daphnis ?

Exercice 8. Un automobiliste doit dévisser dans le brouillard les boulons d'une roue de sa voiture. Il utilise une croix dont les quatre extrémités sont des clefs de tailles différentes indiscernables au toucher.
i) Il procède au hasard, sans méthode. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre d'essais pour trouver la bonne clef. Calculer la probabilité de faire trois essais pour trouver la bonne clef. Généraliser à n essais. En déduire la loi de X, son espérance et sa variance.
ii) Il procède au hasard, en éliminant les extrémités déjà testées. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'essais. Donner la loi de Y. Calculer son espérance et sa variance.

Exercice 9. Une variable aléatoire discrète X suit la loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Les valeurs que prend X sont affichées sur un écran, mais celui-ci est défaillant. Lorsqu'il doit afficher 0, il affiche n'importe quelle valeur entre 1 et n, au hasard, et de façon équiprobable. Le reste du temps, le compteur affiche la valeur exacte de X. Soit Y le numéro aléatoire affiché.

1. Décrire la loi de Y.

2. Montrer que
$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X) + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}(1-p)^n .$$
En déduire $\mathbb{E}(Y)$.
3. L'écran affiche le chiffre 1. Quelle est alors la probabilité que la variable aléatoire X ait pris réellement la valeur 1 ?

Exercice 10. Dans le paquet d'un produit intrinsèquement ennuyeux, on trouve en bonus un jouet en plastique très amusant. On suppose qu'il y a c types différents de jouets qui ont la même chance de se trouver dans le paquet. Une personne achète un produit par jour. On considère le nombre de paquets et le nombre de jours illimités.

1. On note T_1 la variable aléatoire égale au temps écoulé nécessaire pour que la personne possède 2 jouets de types différents.
   a) Déterminer la loi de T_1.
   b) Déterminer $E(T_1)$.
2. Pour $1 \leq i < c-1$, on note S_i la variable aléatoire égale au temps écoulé nécessaire entre l'acquisition du i-ème type de jouet et celui du $(i+1)$-ème type.
   a) Déterminer la loi de S_i.
   b) Déterminer $E(S_i)$.
3. Quel est, en fonction de c, le temps moyen nécessaire pour qu'une personne achetant un paquet du produit par jour puisse posséder toute la collection des c types de jouets ?

Exercice 11. On tire au hasard un nombre X dans $\{1, ..., n\}$, puis un nombre au hasard Y dans $\{1, ..., X\}$. Donner la loi de Y.

Exercice 12. On souhaite dépister une maladie parmi une population de 8000 personnes. On suppose qu'on dispose d'une méthode d'analyse infaillible de prélèvements sanguins. On considère que les individus sont touchés par la maladie de manière indépendante, et que cette maladie touche statistiquement 1% de la population. On se propose de comparer deux méthodes pour le dépistage.

- Méthode A : on effectue les 8000 analyses individuelles.

- Méthode B : on répartit les 8000 individus en n groupes de r prélèvements (donc $n \times r = 8000$).

Pour chacun des groupes, on mélange les r prélèvements obtenus, puis on procède à une analyse de chacun des n mélanges obtenus. Quand un mélange est négatif, aucun des membres du groupe n'est malade. Quand un mélange est positif, au moins un des membres du groupe est malade : on procède alors à une analyse individuelle pour chacune des r personnes composant le groupe.

i) On étudie dans cette question la méthode B.

a) Pour un groupe de r personnes, quelle est la probabilité que le mélange ait un test positif ? On note α cette probabilité.

b) Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de groupes positifs. En supposant que la composition de chacun des n groupes est indépendante des autres groupes (on admet que c'est une hypothèse raisonnable tant que r est "petit" (disons $r \leq 8000/100 = 80$)), reconnaître la loi de X et en déduire son espérance.

c) Soit Y la variable aléatoire égale au nombre total d'analyses effectuées avec la méthode B. Donner une expression de l'espérance de Y en fonction de r, α et n. Calculer une approximation de l'espérance de Y en considérant que $1 - \frac{r}{100}$ est une approximation de $(1 - \frac{1}{100})^r$.
ii) En utilisant l'approximation de la question précédente, donner la valeur de r qui minimise le coût du dépistage. Finalement, quelle méthode est la plus économique ?

Exercice 13 (Promenade aléatoire sur un tétraèdre)**.** Soit $ABCD$ un tétraèdre. On lance un dé non pipé. Si le résultat est 1 ou 2, on se déplace sur l'arête $[AB]$ si on était en A ou B, et sur $[CD]$ si on était en C ou D. Si le résultat est 3 ou 4, on se déplace sur l'arête $[AC]$ si on était en A ou C, et sur $[BD]$ si on était en B ou D. Si le résultat est 5 ou 6, on se déplace sur l'arête $[AD]$ si on était en A ou D, et sur $[BC]$ si on était en B ou C.
On part de A. Soit X le nombre de lancers qui nous ramènent pour la première fois en A. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 14. Un archer disposant de k flèches effectue des tirs répétés jusquà ce qu'il ait soit atteint la cible, soit épuisé ses flèches. Sachant que le tireur atteint la cible avec probabilité p lors de chaque tir, et que ceux-ci sont indépendants, déterminer la probabilité qu'il n'atteigne jamais la cible, la loi et l'espérance du nombre de tirs effectués.
On rappelle que pour tout $z \neq 1$,

$$1 + z + \cdots + z^{k-1} = \frac{1 - z^k}{1 - z}.$$

Exercice 15. Soit une suite $\{X_n\}_{n\geq 1}$ de variables aléatoires réelles indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$.

Pour $\omega \in \Omega$, on pose

$$T(\omega) = \inf\{n \geq 1; X_n(\omega) = 1\},$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$. Montrer que T est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}_* \cup \{+\infty\}$. Déterminer la loi de T et calculer son espérance $\mathrm{E}(T)$.

Exercice 16. Soit $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
i) Montrer que pour tout $n \in N^*$

$$\sum_{k=1}^{n} k\,\mathrm{P}(X = k) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{P}(X > k)\right) - n\mathrm{P}(X > n).$$

ii) On suppose que la série de terme général $u_k = \mathrm{P}(X > k)$ converge

a) Montrer qu'alors X admet une espérance.
b) En remarquant que $\mathrm{P}(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X = k)$, montrer $\lim_{n\to+\infty} n\,\mathrm{P}(X > n) = 0$.
c) En déduire $\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X > k)$.
iii) Réciproquement, montrer que si l'on suppose que $\mathrm{E}(X)$ existe, alors la série de terme général $u_k = \mathrm{P}(X > k)$ converge, et on a aussi

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X > k)\,.$$

Exercice 17. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de Poisson. Notons λ_1 et λ_2 les paramètres respectifs des lois de ces deux v.a. discrètes.
i) Calculer la fonction génératrice g_{X_1} de X_1. En déduire l'espérance et la variance de X_1.
ii) Démontrer que la variable aléatoire $Y = X_1 + X_2$ est de Poisson d'espérance $\lambda_1 + \lambda_2$.
On Suppose maintenant que $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$, et X_i= "le nombre de téléviseurs demandés pour achat au cours d'une journée dans un magasin M_i" ($i = 1$ ou 2).
iii) Quel est le nombre minimum de téléviseurs dont le magasin M_1 doit disposer pour satisfaire la demande d'une journée avec une probabilité supérieure à 90%.
iv) Si les magasins M_1 et M_2 réunissent leurs stocks, quel est le nombre minimum de téléviseurs dont le stock commun doit disposer pour que les deux magasins satisfassent les demandes d'une journée avec une probabilité supérieure à 90%.
iv) Les deux magasins ont-ils interêt à réunir leurs stocks ?

Exercice 18. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par :
— $(X, Y)(\Omega) = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid m \le n\}$,
— $\forall m, n \in \mathbb{N}$, $m \le n$, $\mathrm{P}\left((X, Y) = (m, n)\right) = \frac{\binom{n}{m}\mathrm{e}^{-2\lambda}\lambda^n}{n!}$, où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
i) Déterminer les lois marginales de X et Y.
ii) X et Y sont-elles indépendantes ?
iii) Calculer la covariance de X et Y.
iv) Pour n fixé, déterminer la loi de X conditionnée par $\{Y = n\}$.
v) On suppose que Y représente le nombre de personnes qui arrivent à un guichet durant une période de 1 minute, et X représente le nombre de femmes qui arrivent à ce guichet pendant la même période. Comment interpréter le résultat iv) dans ce cas ?

Exercice 19. Le nombre N de versements d'indemnités effectués par une compagnie d'assurance en une semaine est donné par une variable aléatoire d'espérance n_0. Pour $i \in \mathbb{N}$, on suppose que le montant du i-ème versement est une variable aléatoire discrète Y_i définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ à valeur dans $\mathbb{N}$. On suppose que les variables aléatoires Y_i sont de même loi et ont une même espérance μ. On fait l'hypothèse que les variables aléatoires Y_i sont indépendantes, et sont indépendantes de N.
Soit $U = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N$ la variable aléatoire qui représente les versements totaux effectués par la compagnie en une semaine. La variable aléatoire U est donc définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ par

$$U(\omega) = Y_1(\omega) + Y_2(\omega) + \cdots + Y_{N(\omega)}(\omega)$$

(si $N(\omega) = 0$, on pose $U(\omega) = 0$). Le but de l'exercice est de montrer que $E(U) = n_0\mu$. On admettra que pour une série double à termes positifs $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ on a $\sum_{i=0}^{\infty}(\sum_{j=0}^{\infty} u_{i,j}) = \sum_{j=0}^{\infty}(\sum_{i=0}^{\infty} u_{i,j})$ où les séries peuvent éventuellement être divergentes (on a alors $+\infty = +\infty$).

1. Quelle série doit converger pour que U admette une espérance ?
2. Montrer que pour tout $k \geq 0$,
$$\mathrm{P}(U = k) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathrm{P}(N = n) \times \mathrm{P}(Y_1 + \cdots + Y_n = k)\right).$$
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, comment peut-on trouver sans grand calcul la valeur de
$$\sum_{k=0}^{\infty} k\mathrm{P}(Y_1 + \cdots + Y_n = k)$$
en fonction de n et de μ ? Justifier votre réponse en citant bien la ou les propriétés utilisées.
4. En déduire que $E(U) = n_0\mu$.

Exercice 20. Sur l'île du Crozet, il passe au plus un bateau par mois. Chaque mois il y a la même probabilité p qu'un bateau passe, et on suppose que la venue de chaque bateau est indépendante de ce qui s'est passé les autres mois. On suppose qu'une personne arrive par bateau sur l'île au mois 0.
Pour rédiger les solutions, on se servira des événements suivants : pour $i \in \mathbb{N}^*$, B_i : un bateau arrive sur l'île au mois i ; C_i : un bateau arrive sur l'île au mois i avec des cigarettes ; A_i : un bateau arrive sur l'île au mois i avec de l'alcool.

1. Soit M le nombre de mois qu'il faudra que la personne attende avant l'arrivée du prochain bateau. Donner la loi de M.
2. Chaque bateau a une probabilité c de contenir des cigarettes et cela indépendamment de tout le reste (qu'il arrive ou non, qu'il y en ait eu aux mois précédents). Soit M_c le nombre de mois qu'il faudra attendre avant le ravitaillement en cigarettes. Quelle est la loi de M_c ?
3. Donner la loi de N_c, le nombre de cargaisons de cigarettes reçues entre les mois 1 et m ?
4. Il se peut aussi qu'il y ait de l'alcool dans la cargaison avec probabilité μ et cela de manière totalement indépendante du reste (entre autres la présence ou non de cigarettes). Soit M_a le nombre de mois qu'il faudra attendre avant le ravitaillement en alcool. Quelle est la probabilité que $M_c = M_a$?

Exercice 21. Soient $U_1,\ U_2,\ \ldots,\ U_n$, n variables aléatoires indépendantes ne prenant que les valeurs $+1$ et -1 avec probabilité $1/2$. On pose $V_n = \prod_{k=1}^{n} U_k$. Déterminer la loi de V_n.