Université de Toulon
M1 MEEF Mathématiques

TD 2 - Espaces probabilisés - probabilités - probabilités conditionnelles

Le cours

- **Expériences aléatoires. Univers. Issues. Probabilité : Cas discret.**

  Une expérience aléatoire est une expérience qui possède plusieurs issues possibles (appelées aussi réalisations), toutes bien définies, mais pour laquelle l'occurence d'une de ces issues ne peux être déterminée à l'avance.

  Dans le cas où ces issues possibles sont en nombre fini $n \in \mathbb{N}$ ou infini dénombrable, on modélise une expérience aléatoire par *l'univers* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$ constitué de toutes les issues possibles ω_i $(i = 1, 2, \cdots n)$ de l'expérience, et la donnée d'une famille de réels $\{P(\omega_1), P(\omega_2), \cdots, P(\omega_n)\}$ avec $P(\omega_i) \in [0, 1]$ pour tout $i = 1, 2, \cdots n$, et telle que $P(\omega_1) + P(\omega_2) + \cdots + P(\omega_n) = 1$. Dans ce cas, $P(\omega_i)$ est *la probabilité de l'issue* ω_i. Si on se réfère à la définition générale d'une probabilité (voir ci-dessous), il convient normalement de noter $P(\{\omega_i\})$, mais par abus de langage, on note $P(\omega_i)$.

  Un *événement* est une partie de l'univers Ω. La probabilité d'un événement $A \subset \Omega$ est donnée par

  $$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i)\,, \quad \text{(cas discret).} \tag{1}$$

  Dans le cas particulier où toutes les issues d'un univers fini Ω sont équiprobables, on a aussi

  $$P(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} \quad \text{(cas d'équiprobabilité)}\,.$$

  Si A est un événement de Ω, l'ensemble $\Omega \setminus A$, noté $\overline{A}$, contient toutes les issues de Ω qui ne sont pas dans A, et c'est un événement appelé "*événement contraire de A*".

  Si A et B sont deux événements, $A \cup B$ est aussi un événement dont les issues sont dans A ou B. Le "ou" employé ici n'est pas disjonctif ; c'est le "ou" mathématique. On dit que $A \cup B$ est l'événement "*A ou B*".

  Si A et B sont deux événements, $A \cap B$ est aussi un événement, dont les issues sont à la fois dans A et B. On dit que $A \cap B$ est l'événement "*A et B*".

  Remarques : Les définitions ci-dessous permettent d'étendre les notions d'*univers*, d'*événements* et de *probabilités* donnés ci-dessus dans un cadre à la fois rigoureux et très général.

  On notera que contrairement au cas décrit ci-dessus, il est en général insuffisant dans un cadre général de connaître seulement les $P(\omega_i)$ pour tous les $i = 1, \cdots, n$ pour déterminer la probabilité de n'importe quel événement.

  Dans le cadre général ci-dessous, l'ensemble de tous les événements que l'on peut considérer n'est pas non plus nécessairement égal à l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω. Il peut arriver que ce soit seulement un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$ et il devra alors avoir une certaine structure. Cet ensemble d'événements sera appelé tribu ou σ-algèbre.

  Dans l'utilisation des probabilités en collèges/lycées, on se restreint toujours à deux cas :

1. le cas *discret*, que l'on vient de décrire, qui est le cas pour lequel Ω est fini (fini ou dénombrable en BTS). On a alors que l'ensemble des événements est $\mathcal{P}(\Omega)$ qui est constitué de toutes les parties de Ω, et la probabilité est *entièrement déterminée* par la donnée des $P(\{\omega_i\})$ pour tout i et par la propriété (1).
2. le cas *à densité*. Dans ce cas, l'univers considéré est généralement un intervalle de $\mathbb{R}$, pas forcément borné. L'ensemble des événements est donné par la tribu engendrée par les intervalles de l'univers. Cette tribu est incluse mais pas égale à l'ensemble des parties de l'univers. Dans les applications, et dans la présentation niveau lycée, on se contente d'une description de la probabilité seulement pour les intervalles ; on peut démontrer avec les outils généraux ci-dessous, que cela suffit de connaître la probabilité sur les intervalles pour la connaître sur tous les événements. On ne rencontre le cas à densité qu'au lycée, et seulement pour les lois de certaines variables aléatoires. On n'entre pas dans les détails ici pour éviter des confusions ; on reviendra plus précisemment sur ce cas dans le paragraphe sur les variables aléatoires à densité.

- **Expériences aléatoires. Univers. Issues. Probabilité : Cas général.**

  - **Tribus ou σ-algèbres** Soit Ω un ensemble et $\mathfrak{F}$ un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$, l'ensemble des parties de Ω. On dit que $\mathfrak{F}$ est une *tribu* (ou *σ-algèbre*) si les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

    (i) $\Omega \in \mathfrak{F}$

    (ii) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathfrak{F}$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{F}$

    (iii) $A \in \mathfrak{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathfrak{F}$ ($\bar{A}$ est $\Omega \setminus A$, le complémentaire de A dans Ω, noté aussi A^c).

    Un couple $(\Omega, \mathfrak{F})$, où Ω est non vide et $\mathfrak{F}$ est une tribu sur l'univers Ω, est appelé *espace probabilisable.*

    (en compléments, voir aussi *algèbre de Boole*, *classe monotone*, *tribu grossière*, *tribu engendrée*, *tribu de Borel*).

  - On appelle *événement certain* tout événement dont la probabilité vaut 1. L'ensemble Ω qui constitue l'univers est un exemple d'événement certain. Tout singleton $\{\omega\}$ de Ω est appelé *issue* ou *événement élémentaire.* On réserve parfois le vocable *issue* à un élément de Ω plutôt qu'au singleton constitué de cet élément. Si A est un événement, $\bar{A}$ est l'*événement contraire* de A. Deux événements A et B sont *incompatibles* si $A \cap B = \emptyset$. Un système exhaustif de Ω est une partition dénombrable de Ω qui ne contient pas l'ensemble vide.

  - **Probabilités.**
    Soit $(\Omega, \mathfrak{F})$ un espace probabilisable. On appelle *mesure de probabilité P* sur $\mathfrak{F}$ toute application de $\mathfrak{F}$ dans $\mathbb{R}$, telle que

    (a) $\forall A \in \mathfrak{F}$, $0 \leq P(A) \leq 1$

    (b) $P(\Omega) = 1$

(c) si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements de $\mathfrak{F}$, deux à deux incompatibles, alors
$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \quad (\sigma\text{-additivité})\,.$$

Le réel $P(A)$ est appelé probabilité de A.

Un triplet $(\Omega,\, \mathfrak{F},\, P)$, où $\Omega \neq \emptyset$, $\mathfrak{F}$ tribu sur Ω et P probabilité sur $(\Omega,\, \mathfrak{F})$, est appelé *espace probabilisé*.

Les propriétés élémentaires d'une probabilité P sont (s'entraîner à les montrer) :

- $P(\emptyset) = 0$.
- $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$ et $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.
- $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
- Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements (pour l'inclusion), alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n) = P(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n)$
- Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements, alors $\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n)$

Deux événements A et B sont *indépendants* si $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$.
Soit (A_n) une suite dénombrable d'événements. On dit que les événements A_1, A_2, ... sont *mutuellement indépendants* si pour toute sous-suite finie A_{i_1}, A_{i_2}, ... A_{i_k} de (A_n) on a
$$P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right) = P(A_{i_1})\, P(A_{i_2}) ... P(A_{i_k})\,.$$

- **Probabilités conditionnelles .**

Soit $(\Omega,\, \mathfrak{F},\, P)$ un espace probabilisé, et $A \in \mathfrak{F}$ tel que $P(A) > 0$. Alors, l'application $P_A(.)$ (ancienne notation $P(\;.\mid A)$), définie sur $\mathfrak{F}$ par
$$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}\,,$$
est une probabilité sur $(\Omega,\, \mathfrak{F})$ appelée *probabilité conditionnelle*.

On a les propriétés suivantes (les montrer) :
Formule du double conditionnement : Si A_1, A_2 et A_3 sont trois événements tels que $P(A_1 \cap A_2) \neq 0$, alors :
$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P_{A_1\cap A_2}(A_3)\, P_{A_1}(A_2)\, P(A_1)$$
(se généralise à n événements)

Formule de probabilités totales : Soit $(B_i)_{i\in I\subset\mathbb{N}}$ un système complet d'événements, i.e., tel que $B_i \cap B_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j$, tel que $\bigcup B_i = \Omega$ et vérifiant $B_i \neq \emptyset$ $(\forall i \in I)$.

On parle aussi de système exhaustif d'événements. On suppose de plus que pour tout i, $P(B_i) \neq 0$ (condition plus forte que d'avoir seulement $B_i \neq \emptyset$). Alors, pour tout $A \in \mathfrak{F}$ on a :

$$P(A) = \sum_n P_{B_n}(A)\, P(B_n).$$

Théorème de Bayes : Soit $I \subset \mathbb{N}$ et soit $(B_n)_{n \in I}$ un système complet d'événements, tous de probabilité non nulle, alors, pour tout $A \in \mathfrak{F}$ tel que $P(A) > 0$ on a, $\forall k \in I$,

$$P_A(B_k) = \frac{P_{B_k}(A)\, P(B_k)}{\sum_n P_{B_n}(A)\, P(B_n)}\,.$$

Ce résultat est aussi appelé *formule de probabilité des causes*. Le démontrer en utilisant la *formule des probabilités totales*.

Notez que ces deux résultats restent vrais sous des conditions plus faibles. Par exemple, on peut remplacer la condition $\bigcup_i B_i = \Omega$ par $P(\bigcup_i B_i) = 1$.

Les exercices

Exercice 1 (sur la définition d'une probabilité discrète)**.** Le document d'accompagnement [1] pour les classes de secondes donne : *Une distribution de probabilité sur un ensemble* Ω *est définie par la donnée des probabilités des éléments de* Ω*. Un événement est défini comme sous-ensemble de* Ω*. C'est cette définition ensembliste qui permet de calculer la probabilité d'un événement en ajoutant les probabilités des éléments qui le constituent. On consolide à l'occasion la notion d'ensemble ou de sous-ensemble, ce qui permet, entre autres, d'ancrer l'idée que dans un ensemble on ne répète pas leurs éléments et que leur ordre n'importe pas*

Si un ouvrage (fictif cette fois) présentait les probabilités sur un ensemble fini de la façon suivante, qu'en penseriez-vous ?

> **Définition**. Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$ un ensemble fini de réalisations. On appelle probabilité sur Ω la donnée d'une famille de réels $\{P(\omega_1), P(\omega_2), \cdots, P(\omega_n)\}$ avec $P(\omega_i) \in [0, 1]$ pour tout $i = 1, 2, \cdots n$, et telle que $P(\omega_1) + P(\omega_2) + \cdots + P(\omega_n) = 1$. Dans ce cas, $P(\omega_i)$ est la probabilité de l'issue ω_i.
> **Propriété :** Pour tout $A = \{e_1, e_2, \cdots e_k\} \subset \Omega$, la probabilité de A est donnée par
> $$P(A) = P(e_1) + P(e_2) + \cdots + P(e_k).$$
> **Corollaire :** Pour tout $A \subset \Omega$ et $B \subset \Omega$ tels que $A \cap B = \emptyset$, on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Exercice 2. Soit E un ensemble, et soient $A \neq E$ et $B \neq E$ deux sous ensembles non vides de E, tels que $A \not\subset B$, $B \not\subset A$, et $A \cap B \neq \emptyset$. Décrire la plus petite σ-algèbre de E contenant A et B.

Exercice 3. Soit un espace probabilisable $(\Omega, \mathfrak{F})$, et soient $A_1, \ldots, A_n$, n éléments de $\mathfrak{F}$. Donner l'écriture ensembliste des événements suivants :

1. Au moins un des A_i est réalisé.
2. Ni A_1 ni A_3 ne sont réalisés.
3. Aucun des A_i n'est réalisé.
4. Tous les A_i avec i pair sont réalisés.
5. Exactement un des A_i est réalisé.
6. Au plus un des A_i est réalisé.

Exercice 4. Soient A, B et C trois événements d'un espace probabilisé. On suppose que si A et B sont réalisés, alors C est réalisé. Montrer que $P(A) + P(B) \leq 1 + P(C)$.

Exercice 5. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Montrer que A et B sont deux événements indépendants, si et seulement si $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

1. Eduscol [dgesco], Mathématiques, Lycée, *Ressources pour la classe de seconde. Probabilités et Statistiques*, juin 2009

Exercice 6. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. Rappeler la propriété de σ-additivité pour P.
2. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante (pour l'inclusion) d'éléments de la tribu $\mathcal{A}$, i.e., une suite d'ensembles mesurables de Ω telle que $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_n A_n\right) .$$

Exercice 7 (Problème du Chevalier de Méré (1654))**.** Quel est l'événement le plus probable : obtenir au moins une fois un 6 en lançant 4 fois un dé ou obtenir au moins une fois un double-six en lançant 24 fois une paire de dés ?

Exercice 8. Soit $(\Omega,\, \mathfrak{F},\, P)$ un espace probabilisé et soient A et B deux événements de $\mathfrak{F}$ tels que

$$P(A) = P(B)/2, \quad P(\overline{B}) = 0.3 \quad \text{et} \quad P(\overline{A} \cap B) = 0.4$$

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 9 (Extrait de *Math'x, Terminale S*)**.** Un sac contient six jetons : un jeton rouge marqué 1, un jeton rouge marqué 2, un jeton rouge marqué 3, un jeton bleu marqué 1, un jeton bleu marqué 2, et un jeton vert marqué 1.

— On extrait au hasard un jeton du sac. Construire l'univers des possibles pour cette expérience.

— On désigne respectivement par R, U et D les événements :
R : "le jeton est rouge" ; U : "le numéro est 1" ; D : "le numéro est 2".
Les événements R et U sont-ils indépendants ? Et R et D ? Et R et $\overline{D}$?

Exercice 10 (indépendance deux à deux et mutuelle indépendance)**.** On jette deux dés à six faces. On suppose que les dés ne sont pas truqués et que chaque combinaison est donc équiprobable. On considère les trois événements suivants :
A_1 = "le premier dé amène un nombre pair".
A_2 = "le deuxième dé amène un nombre impair".
A_3 = "la somme des nombres obtenus par les deux dés est un nombre pair".
Montrer que, pour tout $i \neq j$, A_i et A_j sont indépendants, mais que A_1, A_2, A_3 ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice 11. Deux cours ont lieu en parallèle dans deux amphithéâtres contigus. Les deux amphis, appelés A et B, contiennent respectivement 90% et 50% de filles, et, en B, il y a 4 fois plus d'étudiants (hommes ou femmes) qu'en A.

Les deux amphithéâtres se vidant simultanément dans le même couloir, quelle est la probabilité qu'une fille choisie au hasard sorte de A ?

Exercice 12. En Belgique, on mange deux types de frites : les frites traditionnelles à section rectangulaire et les frites new-look à section hexagonale. Parmi les frites que consomment les Flamands, il y a 65% de frites traditionnelles alors que les Wallons en mangent 75%. L'équipe de Belgique de football (les fameux "Diables rouges") est composée de sept Flamands et quatre Wallons.
i) Quelle est la probabilité qu'un joueur pris au hasard dans l'équipe consomme des frites traditionnelles.
ii) Un joueur est surpris à la mi-temps avec un cornet de frites hexagonales. Calculer la probabilité pour qu'il soit Flamand.

Exercice 13. On considère le jeu suivant : le joueur lance d'abord un dé non truqué. Il tire ensuite un jeton dans une urne choisie en fonction du résultat du dé. L'urne A est choisie quand le dé donne 1, 2 ou 3, l'urne B quand on obtient 4 ou 5 et l'urne C quand on obtient 6. Les urnes contiennent les jetons suivants :
urne A : deux jetons rouges, trois jetons bleus ;
urne B : deux jetons bleus, quatre jetons verts ;
urne C : un jeton vert, un jeton rouge.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un jeton rouge par ce procédé ?
2. On obtient un jeton vert. Quelle est la probabilité que ce jeton soit issu de l'urne B ?
3. On obtient un jeton bleu. Quelle est la probabilité que le lancer du dé ait donné 3 ?
4. Quelle est la probabilité de ne pas obtenir un jeton vert, sachant que le lancer du dé a donné 3 ou 6 ?
5. Est-ce que l'évènement *choisir dans l'urne C* et l'évènement *obtenir un jeton rouge* sont indépendants ? Justifiez votre réponse.

Exercice 14 (un grand classique ! D'après *Math'x, Terminale S*)**.** Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4}.

Dans un pays, 2% de la population est contaminée par un virus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes.

• La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de $0,99$ (sensibilité du test)

• La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de $0,97$ (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population. On note V l'événement : "la personne est contaminée par le virus" et T l'événement : "le test est positif". $\overline{V}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les événements contraires de V et T.

1. a) Traduire la situation à l'aide d'une arbre de probabiltés.
   b) Donner la valeur de l'événement $V \cap T$.
2. Démontrer que la probabilité que le test soit positif est $0,0492$.
3. a) Justifier par un calcul la phrase : "Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40% de chances que la personne soit contaminée".

b) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

Exercice 15. 1. Soit $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espace probabilisé. Soit $(B_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements de $\mathfrak{F}$ tous de probabilité non nulle. Démontrer la *formule des probabilités totales* :

$$P(A) = \sum_{i\in I} P_{B_i}(A)P(B_i).$$

2. Soit un dé à 4 faces équilibré, et trois urnes contenant l'une 3 boules vertes et 2 boules rouges, la seconde 1 boule verte et 4 boules rouges et la troisième 5 boules vertes. On considère une expérience qui consiste d'abord à tirer le dé. Si le résultat du dé vaut 1 ou 2, on tire une boule dans l'urne 1 ; si le résultat du dé vaut 3, on tire une boule dans l'urne 2 ; si le résultat du dé vaut 4, on tire une boule dans l'urne 3. Soit $A = \{\text{obtenir une boule verte}\}$.
   Modéliser cette expérience avec un arbre et interpréter par une lecture sur l'arbre la formule des probabilités totales.
3. Soit $B \in \mathfrak{F}$. Si on suppose seulement que $(B_i)_{i\in I}$ forme une partition de B, et que les B_i sont tous de probabilité non nulle, montrer :

$$P_B(A) = \sum_{i} P_{B_i}(A)P_B(B_i).$$

Exercice 16 ("Formule du crible" ou "formule de Poincaré")**.**
i) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, une suite d'évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On veut démontrer la *formule du crible* :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n} P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \ldots \cap A_{i_k}\right) \tag{2}$$

(a) Pour A et B dans $\mathcal{A}$, montrer que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

(b) En supposant que pour un certain n l'égalité (2) est vraie pour toute famille de n ensembles dans $\mathcal{A}$, montrer

$$P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n} P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \ldots \cap A_{i_k} \cap A_{n+1}\right)$$

(c) En utilisant 1.1 et 1.2, démontrer (2) par récurrence.

ii) *Application :* n membres du club Diogène se donnent rendez-vous au bar du club. Chacun d'eux dépose son chapeau au vestiaire en entrant. À la fin de la soirée, chacun des n membres reprend un chapeau au hasard.

(a) En posant $A_i = \{\text{le membre } i \text{ a son propre chapeau en sortant}\}$, montrer que $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}$, où les i_j sont des éléments de $\{1, 2, ..., n\}$ deux à deux distincts.

(b) En déduire en utilisant (2), que la probabilité pour qu'un membre au moins ait son propre chapeau en sortant est

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k!}\,.$$