Université de Toulon

M1 MEEF Mathématiques

TD 1 - Dénombrement - Équiprobabilité

Le cours

- **Parties d'un ensemble.** Le nombre de parties d'un ensemble E à n éléments est
$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n\,. \tag{1}$$
Preuve : On identifie à une bijection l'ensemble E à $\{1,\, 2\, \ldots,\, n\}$. À un sous ensemble F de E, on associe l'application $E \to \{0,\, 1\}$ qui au $k \in E$ associe 1 s'il est dans F et 0 sinon. A chaque $F \subset E$ correspond une et une seule telle application. Réciproquement, à toute application de E dans $\{0,\, 1\}$ correspond un unique ensemble F. Le nombre de sous-ensembles (ou parties) de E est donc le nombre de ces applications de E dans $\{0,\, 1\}$. Pour les compter, on peut par exemple utiliser un arbre : le dénombrement des branches de cet arbre conduit au résultat (1).
- **Applications.** L'ensemble des applications d'un ensemble E dans un ensemble F est noté F^E. Le nombre d'applications d'un ensemble E à n éléments dans un ensemble F à p éléments est
$$\mathrm{Card}(F^E) = p^n = \mathrm{Card}(F)^{\mathrm{Card}(E)}\,. \tag{2}$$
Démontrer l'égalité (2).
Exemple : Le nombre de façons de répondre par $\{Passable,\, Moyen,\, Bon\}$ à un questionnaire de satisfaction constitué de 5 questions $a)$, $b)$, $c)$, $d)$ et $e)$ est le nombre d'applications de $E = \{a,\, b,\, c,\, d,\, e\}$ dans $F = \{P,\, M,\, B\}$, qui vaut 3^5.
- **Le nombre n^p.** D'après ce qui précède, on peut donc interpréter le nombre n^p de plusieurs façons différentes :
  1. C'est le nombre de façons de faire p tirages avec remise de boules numérotées de 1 à n dans une urne qui contient uniquement ces n boules, et où l'ordre du tirage a son importance : on tire une boule, on note son numéro, et on la remet dans l'urne ; on répète l'opération p fois.
  2. Le nombre de façons de jeter p dés à n faces en s'intéressant au résultat de la face du dessus, et en considérant que les dés sont de couleurs différentes.
  3. Le nombre de p-uplets (ou p-listes) $(x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_p)$, où les x_i sont des éléments de $\{1,\, 2,\, \cdots,\, n\}$.
  4. Le nombre d'applications de $E = \{1,\, 2,\, \cdots,\, p\}$ dans $F = \{1,\, 2,\, \cdots,\, n\}$. On note parfois cet ensemble F^E.
  5. Lorsque $n = 2$, 2^p est le nombre de sous-ensembles de $\{1,\, 2,\, \cdots,\, p\}$.
- **Arrangements.** (Pour $k \leq n$). Un arrangement de k éléments parmi n éléments correspond à une façon de choisir k éléments différents, dans un ordre précis (on dit "k éléments ordonnés") parmi n éléments. Ainsi un même élément ne peut pas être choisi deux fois, et les deux arrangements $(1, 2)$ et $(2, 1)$ sont différents.

Le nombre d'arrangements de k éléments parmi n éléments est

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+2)(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}\,. \tag{3}$$

Du point de vue des fonctions, un arrangement de k éléments parmi n est vu comme une application injective d'un ensemble à k éléments dans un ensemble à n éléments. Un élément de l'ensemble de départ correspond à "la place" dans l'arrangement ; il est alors commode de considérer comme ensemble de départ $\{1, 2, \dots, k\}$. L'ensemble d'arrivée est l'ensemble des n éléments qu'on veut ordonner.
Exemple : Dans une compétition de gymnastique avec 25 participants, il y a A_{25}^3 podiums différents possibles (choix de 3 compétiteurs parmi 25, dans lequel l'ordre est important).
Démontrer le résultat (3) *en utilisant un graphe où, pour chaque élément de* 1 *à* k *on associera un numéro d'ordre.*

- **Permutations.** Une permutation est un réarrangement de l'ordre de n éléments, i.e. une bijection de $\{1, 2 \dots, n\}$ dans $\{1, 2, \dots, n\}$. Le nombre de permutations de n éléments est
$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n\,. \tag{4}$$
Démontrer (4) *en s'inspirant d'un cas particulier d'arrangement.*
- **Combinaisons.** $(k \leq n)$
Une combinaison est une façon de choisir k éléments, sans ordre, parmi n éléments. Le nombre de combinaisons de k parmi n est le nombre de parties à k éléments que l'on peut extraire d'un ensemble à n éléments, il est noté $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ (ancienne notation : C_n^k) et vaut
$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,. \tag{5}$$
Exemple : Dans un jeu de 52 cartes où l'on distribue 13 cartes à chaque joueur, il y a $\binom{52}{13} = C_{52}^{13}$ possibilités différentes de distribuer une seule main.
Remarque importante : Au lycée, la définition de l'entier $\binom{n}{k}$ n'utilise pas la notion de factorielle. Si on appelle schéma de Bernoulli à n épreuves, de paramètre p, la répétition de n expériences indépendantes et identiques de Bernoulli de paramètre p, alors on définit $\binom{n}{k}$ comme le nombre de chemins qui réalisent exactement k succès dans l'arbre de probabilité du schéma de Bernoulli . On peut montrer que les deux définitions sont bien équivalentes (voir Exercice 8).
- **Tirages avec et sans remise.**
On utilise le vocable *tirage sans remise* pour désigner un "tirage" (on choisit au hasard un élément), on n'a plus le droit dans un tirage suivant de prendre le même élément (on ne remet pas l'élément dans l'urne).
Un arrangement correspond à k tirages sans remise, puisqu'une fois qu'on a choisi un élément parmi les n éléments possibles, et qu'on lui a associé un numéro d'ordre, on ne peut plus choisir à nouveau cet élément. Un arrangement est donc un tirage sans remise, dans lequel l'ordre de tirage est important. Par exemple, dans un quinté, on

choisit cinq chevaux parmi 17 ; on ne peut pas avoir deux fois le même cheval qui occupe deux places d'arrivées différentes, et leur ordre d'arrivée est important.
Dans le cas d'une combinaison, on extrait aussi k éléments ; chaque élément étant extrait un seule fois, on effectue donc aussi un tirage sans remise. En revanche, comme seul *l'ensemble* que l'on obtient au final est l'objet que l'on considère (et pas le k-uplet), l'ordre de tirage n'a aucune importance. Par exemple, à la loterie nationale, on choisit 7 boules parmi 49 ; on ne peut pas tirer deux fois le même numéro, et leur ordre de tirage est sans importance.

Les exercices

Contrôlez vos connaissances : Dans la liste de A à I ci-dessous, dire, quand elle existe, laquelle des quantités 1 à 8 lui correspond.

On note E_n l'ensemble $\{1, 2 \cdots, n\}$. On supposera $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $k < n$.

$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$	$\boxed{A.}$		
nombre de parties à k éléments dans E_n	$\boxed{B.}$	$\boxed{1.}$	n^k
nombre de bijections de E_n dans E_n	$\boxed{C.}$	$\boxed{2.}$	k^n
nombre de bijections de E_n dans E_k	$\boxed{D.}$	$\boxed{3.}$	$n!$
nombre de surjections de E_n dans E_k	$\boxed{E.}$	$\boxed{4.}$	$k!$
nombre d'injections de E_k dans E_n	$\boxed{F.}$	$\boxed{5.}$	A_n^k
nombre d'injections de E_n dans E_k	$\boxed{G.}$	$\boxed{6.}$	A_k^n
nombre d'applications de E_n dans E_k	$\boxed{H.}$	$\boxed{7.}$	$\binom{n}{k}$
nombre de k-uplets d'éléments distincts de E_n	$\boxed{I.}$	$\boxed{8.}$	$\binom{k}{n}$

Exercice 1. a) Dénombrer les tirages différents à la loterie nationale (7 numéros parmi 49).

b) Dénombrer les résultats d'arrivée gagnants possibles au tiercé dans une course avec 12 partants (distinguer les cas gagnants "dans l'ordre" et "dans le désordre").

c) Un numéro de téléphone portable comporte 10 chiffres, dont les deux premiers sont 06. Combien de numéro de téléphone portable sont disponibles ?

d) Combien d'anagrammes possède le mot "VALHALLA" ?

Exercice 2. (Extrait de Dossier "Probabilités" concours 2012)

On lance deux dés équilibrés à six faces, l'un est rouge, l'autre est noir. On s'intéresse à la somme des nombres qui apparaissent sur la face du dessus.

Le dé rouge porte sur ses faces les numéros : 1 ;1 ;2 ;3 ;4 ;4.

Le dé noir porte sur ses faces les numéros : 2 ;2 ;3 ;4 ;5 ;5.

1) Combien y-a-t-il d'issues possibles ? Sont elles équiprobables ?

2) Obtient-t-on plus souvent une somme supérieure ou égale à 7 ou bien une somme inférieure ou égale à 7 ?

Exercice 3 (Extrait de *"BTS, Mathématiques, Comptabilité et Gestion des Organisations, Hachette Éducation"*)**.**

A) Tirages successifs sans remise. On place dans une urne 6 cartons numérotés de 1 à 6. On tire successivement et sans remise 3 cartons en notant au fur et à mesure le nombre marqué sur le carton : on obtient ainsi un nombre de 3 chiffres.

1. Déterminer le nombre de nombres que l'on peut ainsi former (on pourra éventuellement s'aider d'un arbre).
2. Déterminer le nombre de nombres commençant par 1.
3. Déterminer le nombre de nombres finissant par 6.
4. Déterminer le nombre de nombres commençant par 1 et finissant par 6.

B) Tirages successifs avec remise. Reprendre les questions de la partie A) en considérant que l'on remet dans l'urne le carton à chaque tirage.

Exercice 4. Soit A l'ensemble des nombres à six chiffres ne comportant aucun "0". Déterminer les cardinaux des ensembles suivants :

1. A.
2. A_1 ensemble des nombres de A ayant 6 chiffres différents.
3. A_2 l'ensemble des nombres pairs de A.
4. A_3 l'ensemble des nombres de A dont les chiffres lus de gauche à droite forment une suite strictement décroissante.

Exercice 5. On extrait simultanément 5 cartes d'un jeu de 32. Cet ensemble de 5 cartes est appelé une "main"

1. Combien y a-t-il de mains différentes possibles ?
2. Dénombrer les mains de 5 cartes contenant :
   a) un carré
   b) deux paires distinctes
   c) un full (trois cartes de même valeur, et deux autres de même valeurs.
   d) un brelan (trois cartes de même valeur, sans full ni carré

e) une quinte flush (5 cartes de même couleur, se suivant dans l'ordre croissant)

3. En déduire les probabilités respectives de chacune des mains ci-dessus.

Exercice 6. Un clavier de 9 touches permet de composer le code d'entrée d'un immeuble à l'aide d'une lettre suivie d'un nombre de 4 chiffres distincts ou non.

$$\boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \end{array}} \qquad (6)$$

1. Combien de codes différents peut-on former ?
2. Combien y a -t-il de codes comportant au moins une fois le chiffre 1 ?
3. Combien y-a-t-il de codes comportant au moins deux chiffres identiques ?
4. Combien y-a-t-il de codes dont la suite des 4 chiffres est strictement décroissante et contient le chiffre 3 ?

Exercice 7 (*un grand classique*)**.** On suppose que k personnes se retrouvent dans une même soirée.
i) Excluant la possibilité d'un anniversaire le 29 février, et en considérant des années de 365 jours, quelle est la probabilité que deux personnes, au moins, aient leur anniversaire le même jour ?
ii) *Application numérique :* Déterminer la plus petite valeur de k pour que la probabilité cherchée soit supérieure ou égale à 50%.

Exercice 8 (*D'après la deuxième écrite du CAPES 2015 pour i) et ii)*)**.** Dans cet exercice, pour les questions i) et ii), on prendra comme définition de $\binom{n}{k}$ celle vue au lycée (c.f rappel de cours). On supposera aussi $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$
i) Montrer $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
ii) On suppose dans cette question que $k \leq n-1$. En exprimant de deux manières différentes le nombre de $(n+1)$-uplets contenant $k+1$ fois l'élément 1, démontrer que

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

iii) Montrer que la définition du lycée est équivalente à la première définition donnée dans le rappel de cours.
iv) Pour $0 \leq k \leq n-1$, vérifier la relation

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$$

par un calcul direct utilisant les factorielles.

Expliquer le lien entre cette égalité et le triangle de Pascal.
v) Démontrer la formule du binôme de Newton $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

Exercice 9. Soient n, p, q, r, et s des entiers naturels, avec $p \leq r$, $q \leq s$ et $n \leq r+s$.
i) Montrer que

$$\sum_{p+q=n, p\leq r, q\leq s} \binom{r}{p}\binom{s}{q} = \binom{r+s}{n}.$$

Indication. Identifier les coefficients de $(1+a)^r(1+a)^s$ *et* $(1+a)^{r+s}$.
ii) En déduire la formule suivante pour la somme des carrés des coefficients du binôme

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Exercice 10. On dispose de 10 billes que l'on veut placer sur une même rangée.

1. On suppose que les 10 billes sont de couleurs différentes. De combien de façons peut-on les ranger ?
2. On suppose qu'il y a 5 billes rouges, 2 blanches et 3 vertes, et que l'on ne peut pas discerner les billes d'une même couleur.
   a) De combien de façons peut-on les ranger ?
   b) De combien de façons peut-on les ranger si l'on veut que les billes soient groupées par couleur ?
   c) Même question mais seules les rouges doivent être groupées.

Exercice 11 (Extrait contrôle commun UNS-UTLN 2012)**.**
On considère l'ensemble des points de coordonnées entières $\mathbb{Z}^2$.
On suppose que l'on peut se déplacer sur le quadrillage correspondant soit d'un pas vers la droite, soit d'un pas vers le haut. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des chemins qui partent de $(0,\,0)$ et arrivent en $(n,\,n)$.
1) Déterminer le cardinal de $\mathcal{C}$.
2) Soit $k \in \{0, \ldots, n\}$. Compter le nombre de chemins de $\mathcal{C}$ qui passent par le point de coordonnées $(k, n-k)$. On appelle $\mathcal{C}_k$ l'ensemble de ces chemins.
3) Montrer que l'on a la relation : $\mathrm{Card}(\mathcal{C}) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Card}(\mathcal{C}_k)$.

Exercice 12. Un touriste se promène d'îlot en îlot suivant le schéma suivant, où les lettres désignent les îlots et les lignes sont des ponts. Il démarre de A. Chaque déplacement dure 1/2 heure. Sachant qu'il s'arrêtera pour déjeuner seulement quand il ne pourra plus continuer sans traverser deux fois le même pont, calculer la probabilité qu'il déjeune au bout de 2h30.

On prendra soin de justifier la modélisation choisie.