Variables aléatoires discrètes

1 Espérance d'une v.a. à valeurs positives : calcul par transformation d'Abel

Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. On suppose l'espérance de X finie. Redémontrer l'inégalité de Markov : pour tout $n \geq 1$ on a
$$P(X \geq n) \leq \frac{1}{n} E(X).$$
Démontrer le résultat plus précis suivant :
$$P(X \geq n) \leq \frac{1}{n} E(1_{X \geq n} X).$$
où $1_{X \geq n}$ est la fonction caractéristique de l'évènement $X \geq n$.

2. Démontrer que $\lim_{n \to +\infty} E(1_{X \geq n} X) = 0$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $p_n = P(X = n)$ et $q_n = P(X \geq n)$.
Démontrer que $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n$.

2 Loi binomiale négative

Soit m un entier supérieur à 1. On effectue des essais indépendants de probabilité de succès constante égale à p (avec $0 < p < 1$), jusqu'à obtenir m succès (en tout). Soit X le nombre d'essais nécessaires.

1. Calculer la loi de probabilité de X.

2. On suppose $m \geq 2$. Démontrer que $E(\frac{m-1}{X-1}) = p$ mais que $E(\frac{m}{X}) \neq p$.

3 Somme de v.a. indépendantes

Soient X et Y deux v.a. discrètes et prenant chacune un nombre fini de valeurs, qu'on suppose indépendantes. Soit X_1 (respectivement Y_1) une v.a. ayant la même loi que X (resp. Y).

1. Montrer que les couples (X, Y) et (X_1, Y_1) suivent la même loi.

2. En déduire que $X + Y$ et $X_1 + Y_1$ suivent la même loi.

3. Le résultat de la question précédente est-il encore valable si X et Y ne sont pas indépendantes ?

Application : soit X une v.a. qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ et Y une v.a. qui suit la loi $\mathcal{B}(m,p)$, montrer que $X+Y$ suit la loi $\mathcal{B}(n+m,p)$ lorsque X et Y sont indépendantes (on écrira chacune de ces v.a. comme somme de v.a. de Bernoulli).
Remarque : on peut aussi retrouver ce résultat en calculant directement la loi de $X+Y$, ou en utilisant les fonctions génératrices de X et Y.

4 Formule de crible

Dans cet exercice, si A est un évènement on note 1_A la fonction caractéristique de A : c'est la v.a. qui prend la valeur 1 sur A et 0 en dehors.

1. Pour deux évènements A et B, exprimer 1_{A^c}, $1_{A\cap B}$ et $1_{A\cup B}$ en fonction de 1_A et 1_B.

2. Calculer $E(1_A)$.

3. En calculant l'espérance de $1_{(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)^c}$, retrouver la formule du crible :

$$\begin{aligned}
P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n) &= \sum_i P(A_i) - \sum_{i_1<i_2} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}) + \sum_{i_1<i_2<i_3} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}) + \ldots \\
&\quad +(-1)^n \sum_{i_1<\ldots<i_{n-1}} P(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_{n-1}}) + (-1)^{n+1} P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{\{i_1,\ldots,i_k\}\subset[1,n] \\ \mathrm{Card}(\{i_1,\ldots,i_k\})=k}} P(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}).
\end{aligned}$$

Application : on lance r balles dans n cases (avec $r>0$ et $n>0$), calculer la probabilité qu'aucune case ne soit vide.

5 Min de deux variables suivant une loi géométrique

Trouver la loi de la v.a. Z égale au minimum de deux v.a. de lois géométriques X et Y indépendantes de paramètres λ et μ.
Indication : On pourra commencer par calculer $P(Z\geq n)$ pour tout entier n.

6 Ruine du joueur de casino

Un joueur va au casino avec une fortune $a\in\mathbb{N}$. A chaque partie il peut gagner un euro avec une probabilité p et perdre un euro avec une probabilité $q=1-p$. Son but est de jouer jusqu'à obtenir la fortune $c\geq a$, mais il doit s'arrêter s'il est ruiné. On note $s_c(a)$ sa probabilité de succès (atteindre c avant la ruine).

1. Calculer $s_c(0)$ et $s_c(c)$.

2. Montrer (en s'appuyant sur ce qui s'est passé au premier coup) que

$$s_c(a) = p\, s_c(a+1) + q s_c(a-1)\,.$$

3. Déduire la valeur de $s_c(a)$

4. Application numérique : calculer la valeur de $s_c(a)$ dans les cas $a = 100$ et $c = 200$ puis $c = 20000$ pour le jeu de "pile ou face" ($p = 1/2$) et de la "roulette américaine" ($p = 18/38$).

On imagine maintenant que le joueur a le droit d'avoir des dettes (il joue aussi longtemps qu'il le souhaite), et on s'intéresse au temps d'attente du premier gain. On définit φ_n comme étant la probabilité que son premier gain se réalise au n-ième coup. Par convention on pose $\varphi_0 = 0$.

1. Calculer φ_1.

2. Montrer $\varphi_n = q\,(\varphi_1\varphi_{n-2} + \ldots + \varphi_{n-2}\varphi_1)$.

3. On pose $\Phi(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n s^n$. Montrer que $\Phi(s) - p\,s = q\,s\,\Phi(s)^2$.

4. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n$.

5. Soit N la v.a. égale au numéro du coup auquel le joueur réalise son premier gain. Calculer $E(N)$.

7 Fonction génératrice d'une v.a. de Poisson

1. Soit X une v.a. qui suit la loi de Poisson de paramètre λ, $\lambda > 0$. Calculer sa fonction génératrice, en déduire son espérance et sa variance.

2. Soit Y une v.a. qui suit la loi de Poisson de paramètre μ, $\mu > 0$. Calculer la fonction génératrice de $X + Y$ et en déduire la loi de $X + Y$.