Probabilités sur un univers fini

1 3 dés

On jette trois dés non pipés.

1. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un 6.
2. Que vaut la probabilité d'obtenir au moins deux faces portant le même chiffre?
3. Calculer la probabilité que la somme des points marqués sur les trois faces soit paire.
4. Montrer que les deux événements considérés aux questions 2 et 3 sont indépendants.

2 Anniversaires

n personnes sont réunies dans une pièce.

1. Calculez $P(A)$, la probabilité pour que deux d'entre elles au moins aient la même date d'anniversaire.
2. Trouvez un minorant de cette probabilité. Pour cela majorer $\ln(P(A^c))$ sachant que $\ln(1+x) \leq x$.
3. En utilisant la minoration précédente, trouver un nombre de personnes au dessus duquel la probabilité sera supérieure à 95%.

3 La relation d'indépendance n'est pas transitive

On lance deux dés au hasard et on considére les évenements suivants:
$A := \{$ le premier dé tombe sur une face impaire $\}$,
$B := \{$ le deuxième dé tombe sur une face impaire $\}$,
$C := \{$ la somme des valeurs des faces des deux dés est impaire $\}$.
Montrez que A, B, C sont deux à deux indépendants mais pas indépendants.

4 Trois enfants

Mr Martin a trois enfants dont l'un s'appelle Jacques et un autre Paul.

1. Quelle est la probabilité qu'il ait aussi une fille?
2. L'aîné des enfants est Jacques. Quelle est la probabilité qu'il ait aussi une fille?
3. Le benjamin est Paul. Quelle est la probabilité qu'il ait aussi une fille?

5 Formule de Bayes

Une maladie M affecte un français sur mille. On dispose d'un test sanguin qui détecte M avec une fiabilité de 99% lorsque cette maladie est effectivement présente. Cependant, on obtient un résultat faussement positif pour 0.2% des personnes saines testées. Quelle est la probabilité qu'une personne soit réllement malade lorsqu'elle a un test positif? Conclure.

6 Transmission de la vérité

On considére n personnes $I_1, \cdots, I_n$. I_1 reçoit une information sous la forme "oui" ou "non", la transmet à I_2, ainsi de suite jusqu'à I_n, et I_n l'annonce à tous. Chacun d'eux transmet ce qu'il a entendu avec la probabilité p, $0 < p < 1$, le contraire avec la probabilité $1 - p$, et les réponses des n personnes sont indépendantes.

1. Calculer la probabilité p_n pour que l'information soit fidèlement transmise.
2. Que se passe-t-il quand $n \to +\infty$?

7 Tennis

2 joueurs, Albert & Bertrand font une partie de tennis. Pour un jeu les scores sont: 0, 15, 30, 40. Pour simplifier le score de chaque joueur on les notera plutôt: 0,1,2,3. Si A est le score d'Albert et B celui de Bertrand. Albert gagne le jeu dès que $A \geq 4$ et $A \geq B + 2$. On suppose que p est la probabilité pour Albert de gagner un point. Tous les points sont gagnés ou perdus de manière indépendante.

1. On suppose que les 2 joueurs son arrivés à égalité: 40/40: évènement noté E. On va considérer les événements associés aux deux points suivants du jeu. Pour cela on note A1:"Albert gagne le premier point "; A2:"Albert gagne le deuxième point."
   (a) Tracer l'arbre des issues possibles pour les deux points mis en jeu après l'égalité.
   (b) Soit AG l'évènement "Albert gagne le jeu". En utilisant l'arbre précédent en déduire $P_E(AG)$.
2. Calculer la probabilité $P(AB_k)$ qu'Albert gagne le jeu sans passer par 40/40 et que Bertrand gagne exactement k points, k=0,1,2.
   De même calculer $P(E)$.
3. En déduire P(AG): la probabilité qu'Albert gagne un jeu.
4. Application numérique: Calculer la probabilité qu'Albert gagne un jeu si sa probabilité de gagner un point est:
   (a) $p = 70\%$;
   (b) $p = 60\%$.

   Commenter le résultat. On pourra tracer à la machine la courbe $p \mapsto P(AG)$.