Dossier PS 5	Probabilités conditionnelles

L'exercice proposé au candidat

On considère un carré $ABCD$ et son centre O . On note $\Gamma = \{A, B, C, D, O\}$.
Une puce se déplace aléatoirement en sautant d'un point de Γ à un autre. La seule contrainte est que, si un saut relie deux sommets du carré, ceux-ci doivent être adjacents.
A chaque saut, tous les déplacements sont équiprobables. La puce ne reste pas deux fois de suite au même endroit.
Au départ, c'est-à-dire avant son premier saut, la puce se trouve au point O.
Pour tout entier naturel n , on note O_n l'événement « la puce se trouve au point O à l'issue de son $n^{ième}$ saut ». On note $p_n = P(O_n)$; on a donc $p_0 = 1$.
On définit de même les événements A_n , B_n , C_n , D_n .

1) Calculer p_1 et p_2 .
2) Pour tout entier naturel n , démontrer les égalités :
$$p(A_n) = p(B_n) = p(C_n) = p(D_n) = \frac{1}{4}(1 - p_n).$$
3) a. Démontrer que pour tout entier naturel n , $p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n)$. (On pourra utiliser la formule des probabilités totales).
   b. A l'aide de la calculatrice, émettre une conjecture concernant la limite de la suite (p_n).
4) a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a : $p_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.
   b. Calculer la limite de la suite (p_n). Ce résultat permet-il de valider la conjecture émise en 3.b ?

La solution proposée par un élève à la question 2

Si la puce arrive sur le point A , c'est qu'avant elle était en B , en D ou en O.
Pareil pour B (elle pouvait être avant en A, C ou O), pareil pour C et D.
Par contre, pour arriver au point O, il y a 4 possibilités : la puce peut arriver de A, B, C ou D.
En tout , on a $3 \times 4 + 4 = 16$ *chemins.*
Et donc $p(A) = p(B) = p(C) = p(D) = \frac{3}{16}$ *et* $p(O) = \frac{4}{16}$.
On a bien : $\frac{3}{16} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{4}{16}\right)$.
Avec le même raisonnement, on prouvera que $p(A_n) = p(B_n) = p(C_n) = p(D_n) = \frac{1}{4}(1 - p_n)$.

La solution proposée par deux élèves à la question 3

Elève 1

D'après la formule des probabilités totales :

$p(O_{n+1}) = p(O_{n+1} \cap\ A_n) +\ p(O_{n+1} \cap\ B_n) + p(O_{n+1} \cap\ C_n) +\ p(O_{n+1} \cap\ D_n)$

d'où : $p(O_{n+1}) = 4 \times p_{n+1} \times \frac{1}{3}$ *, c'est-à-dire :* $p_{n+1} = \frac{4}{3}\, p_{n+1}$. *Il y a une erreur !*

Elève 2

Je sais que : $p(O_{n+1}) = \ p_{An}(O_{n+1}) +\ p_{B_n}(O_{n+1}) +\ p_{Cn}(O_{n+1}) + p_{Dn}(O_{n+1}) +\ p_{On}(O_{n+1})$

donc $p_{n+1} = \frac{1}{3}\, P(A_n) +\ \frac{1}{3}\, P(B_n) + \frac{1}{3}\, P(C_n) + \frac{1}{3}\, P(D_n) +\ 0$

d'où $p_{n+1} =\ 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}(1 - p_n) =\ \frac{1}{3}(1 - p_n)$.

C'est bien ce qu'il fallait démontrer.

Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez la production de chaque élève en mettant en évidence les compétences acquises dans le domaine de probabilités et en précisant l'origine de ses éventuelles erreurs.

2. Proposez une correction des questions 2 et 3 telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3. Présentez deux ou trois exercices sur le thème « ***Probabilités conditionnelles »*** dont l'un pourra faire appel à la mise en œuvre d'un algorithme.