Thème : optimisation

L'exercice

Soit $[AB]$ un segment de longueur 1 et soit M un point de $[AB]$ distinct de A et B. On construit, du même côté du segment $[AB]$, les triangles équilatéraux AMP et MBQ.

1) Existe-t-il une position du point M telle que le triangle MPQ ait une aire maximale ?
2) Expliquez pourquoi cette position du point M rend minimale l'aire du quadrilatère $ABQP$.

La solution proposée par un élève à la question 1) dans un devoir à la maison

Comme je ne trouvais rien malgré le temps qui passait, j'ai cherché « aire d'un triangle » sur Wikipédia et j'ai trouvé trois formules :

- *une qui utilise base fois hauteur mais je ne connais pas la hauteur de PQM alors je l'ai éliminée ;*
- *une autre la formule de Héron mais il faut connaître les trois côtés et je n'en connais que deux donc j'ai utilisé la troisième $S = \frac{1}{2}ab\sin(\gamma)$*

Je trouve

$$S = \frac{1}{2}x(1-x)\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

Le maximum est obtenu au sommet de la parabole pour $x = -\frac{b}{2a} = 0,5$ et ce maximum vaut $f(0,5) = \frac{\sqrt{3}}{16}$.

Le travail à exposer devant le jury

1- Quelles sont les connaissances et les compétences mises en jeu dans l'exercice ?

2- Analysez la production de l'élève. En particulier
  - que dire de sa démarche ?
  - son raisonnement vous semble-t-il valable ?
  - comment pourriez-vous amener l'élève à justifier au niveau de la classe de seconde la formule de l'aire du triangle qu'il utilise ?

3- Proposez une correction de la question 2) comme vous l'exposeriez devant une classe de seconde.

4- Présentez deux ou trois exercices sur le thème « optimisation ».
