Variables et vecteurs aléatoires à densité loi faible des grands nombres

1 Autour de la loi uniforme

Soit X une v.a.r. qui suit une loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note $D_k(X)$ la variable aléatoire qui donne la $k-$ème décimale de X. Donner la loi de $D_1(X)$. Donner la loi de $D_k(X)$.
2. Quelle est la loi de $Y = \sin(\pi X)$?
3. soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue et strictement croissante. Déterminer la loi de $Y = f(X)$. Comment choisir f pour que Y suive de loi exponentielle ?

2 La loi exponentielle : la demi-vie

Soit T une v.a.r. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Montrer que $P(T \geq E(T))$ est indépendant de λ.
2. Calculer le maximum p_λ de $t \mapsto P(T \in [t, 2t])$. La valeur de t où le maximum est atteint est appelé demi-vie.
3. Calculer λ et p_λ pour un atome de Radon 220 (la demi-vie d'un atome de Radon 220 est de 56s).

3 Médiane d'une v.a.

Soit X une v.a.r. Montrer qu'il existe un réel m tel que $\frac{1}{2} \leq P(X \leq m)$ et $\frac{1}{2} \leq P(X \geq m)$. A quelle condition ce nombre est-il unique ?

4 Exemples de vecteurs aléatoires à densité

1. Soit X un nombre choisi au hasard dans $[0,1]$ et Y dans $[0,X]$.
   Déterminer la densité de (X,Y). En déduire les espérances et variances de X et Y.
2. Un vecteur (X,Y) aléatoire sur $\mathbb{R}^2$ a une longueur unité, et sa direction est aléatoire. Sa loi de probabilité est la loi uniforme sur le cercle unité. Donner les lois marginales.
3. Soit $V = (X,Y)$ de densité $f(x,y) = k$ si $|x| + |y| \leq 1$ et $f(x,y) = 0$ sinon. Calculer k et donner les lois marginales. Calculer $Cov(X,Y)$. Sont-elles indépendantes ?

5 Emetteurs de particules

Deux émetteurs de particules émettent chacun une particule pendant l'intervalle de temps $[0, T]$. On note X et Y les temps d'émission des deux particules émises respectivement par chacune des deux sources. La loi de (X, Y) est la loi uniforme sur $[0, T]^2$.
Un récepteur est positionné pour compter les particules. On sait que s'il reçoit une particule à l'instant t, il est inhibé pendant tout l'intervalle $[t, t + h]$, i.e. il ne prend plus rien en compte. $h > 0$ est connu.
Calculer la probabilité qu'au bout de la durée T le compteur n'ait compté qu'une seule particule.

6 Convergence en loi de la loi binomiale vers la loi de Poisson

Soit n un entier non nul et $\lambda > 0$ fixé. On pose $p = \lambda/n$ et on note X_n une v.a.r. de loi binomiale $B(n, p)$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que $(1 + \frac{x}{n})^n \to e^x$ quand $n \to +\infty$.
2. Soit k un entier fixé et $n \geq k$. Montrer que $P(X_n = k) \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ lorsque $n \to \infty$.

7 Convergence en probabilité – Méthode de Monte-Carlo

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires telle que $E(X_n) \to \mu$ et $V(X_n) \to 0$. Montrer alors que $X_n \to \mu$ en probabilité, i.e. pour tout $\varepsilon > 0$, $P(|X_n - \mu| > \varepsilon) \to 0$.

Applications :

i. Soit X_1, ..., X_n, n variables aléatoires indépendantes, de même loi. On suppose en outre que cette loi admet une espérance, notée μ, et une variance, notée σ^2. On définit la variable aléatoire

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + ... + X_n}{n}$$

Calculer $E(\overline{X}_n)$ et $V(\overline{X}_n)$ et en déduire que la suite $(\overline{X}_n)$ converge en probabilité vers μ.

ii. *La méthode de Monte-Carlo.* Soit (X_n) une suite de v.a.r. indépendantes suivant la même loi uniforme sur $[0, 1]$, et $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une application continue. On pose $Z_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(X_i)$. Montrer que (Z_n) converge en probabilité vers une constante qu'on précisera.

8 Théorème Central Limite et loi de Poisson

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi de Poisson de paramètre 1.

1. Donner la loi de la v.a. $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, son espérance et sa variance.
2. Montrer que la suite de v.a. $Z_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$ quand $n \to +\infty$.
3. En considérant $P(Z_n \leq 0$, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n} \sum_{k=0} n \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$$

9 Théorème Central Limite et assurances

Une compagnie d'assurances assure sur une année n personnes contre un certain risque. On note X_i la somme qu'aura à verser cette année la compagnie au i-ème client. C'est une variable aléatoire qui prend la valeur 0 lorsque le client n'est pas sinistré. On peut en général considérer que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes. Supposons qu'elles obéissent toutes à une même loi d'espérance mathématique μ et de variance σ^2. Soit x la prime demandée à chacun des n clients (on demande la même prime à tous les clients).
Comment la compagnie doit-elle fixer x pour que, avec une probabilité supérieure à 95%, la différence entre l'encaissement des primes et les remboursements sur l'année reste supérieure à un montant b déterminé par ses frais de gestion et le bénéfice minimum qu'elle désire faire ? *(on supposera n suffisamment grand pour que l'approximation gaussienne soit "exacte")*

10 Théorème Central Limite et erreurs d'arrondi

Dans un programme de calcul, l'opérateur décide d'utiliser j chiffres significatifs après la virgule, et d'arrondir tous les résultats d'opérations à cette précision (c'est à dire au nombre avec j chiffres significatifs après la virgule le plus proche, donc à $0,5 \times 10^{-j}$ près). On suppose qu'il effectue 10^6 opérations ́lémentaires successives, que les erreurs commises sont indépendantes deux à deux et de même loi uniforme sur $]-0,5 \times 10^{-j} \,; 0,5 \times 10^{-j}[$, et que l'erreur finale est la somme des erreurs commises sur chaque opération.
Calculer la probabilité pour que l'erreur finale soit inférieure (en valeur absolue) à $0,5 \times 10^{-j+3}$.

11 Moyenne d'une loi normale d'écart-type connu

On a effectué 50 pesées d'un objet avec une balance dont la précision est mesurée par l'écart-type $\sigma = 1$. La totatlisation de ces pesées est de 125g. Donner un intervalle de confiance de niveau 90% pour le poids de cet objet. *(on supposera que le résultat de chaque pesée suit une loi de moyonne égale au vrai poids de l'objet et de variance σ)*