Thème : fonctions

L'exercice.

Soit k un nombre réel, on s'intéresse à l'équation suivante :

$$(E) \qquad \ln(x) = k\,x^2$$

1. A l'aide d'un logiciel ou d'une calculatrice graphique, conjecturer le nombre de solutions de (E) dans $]0,+\infty[$ en fonction de k.
2. On suppose $k \leq 0$. En étudiant les variations de la fonction $f(x) = \ln(x) - k\,x^2$, démontrer que (E) a une unique solution dans $]0,+\infty[$.
3. On suppose $k > 0$. On admet qu'il existe une seule valeur $k_0 > 0$ pour laquelle l'équation (E) a une unique solution dans $]0,+\infty[$.
   (a) Trouver graphiquement une valeur approchée à 10^{-1} près de k_0.
   (b) Quelles sont les positions relatives des courbes représentatives des fonctions $\ln(x)$ et $k\,x^2$ lorsque $k \geq k_0$? En déduire le signe de $\ln(x) - k\,x^2$ pour $k \geq k_0$.
   (c) Quelle est la valeur du maximum de la fonction $g(x) = \ln(x) - k_0\,x^2$ sur $]0,+\infty[$? En s'intéressant au point où ce maximum est atteint, trouver la valeur exacte de k_0.

La solution d'un élève de Terminale S à la question 3.

(a) En faisant varier k très lentement je trouve $k_0 \simeq 0,18$.
(b) Quand $k \geq k_0$ on voit que la courbe représentative de $k\,x^2$ est au-dessus de celle de $\ln(x)$, donc cela veut dire que $k\,x^2 \geq \ln(x) \Leftrightarrow \ln(x) - k\,x^2 \leq 0$ pour tout x .
(c) On vient de voir que $\ln(x) - k_0\,x^2 \leq 0$ pour tout x donc la fonction g est toujours négative et son maximum est 0. Le maximum est atteint pour x tel que $g'(x) = 0$, ce qui donne

$$\frac{1}{x} - 2k_0x = 0 \Leftrightarrow k_0 = \frac{1}{2x^2}$$

mais je ne vois pas comment calculer k_0.

Le travail à exposer devant le jury.

- Analyser la réponse proposée par l'élève, en mettant en évidence les compétences acquises.
- Présentez une solution à la question 2 telle que vous la proposeriez à des élèves de Terminale S.
- Présentez deux ou trois exercices sur le thème *fonctions*, dont l'un au moins fait intervenir la représentation graphique.