Thème : suites et fonctions

L'exercice. Si p_0 désigne le nombre d'individus d'une population à l'instant 0, un modèle de comportement de la suite (p_n) correspondant à l'évolution de ce nombre d'individus aux différents temps $n = 1$, $n = 2$, etc..., est donné par l'équation $p_{n+1} = \dfrac{r\,p_n}{p_n + c}$ où les nombres r et c sont des constantes positives qui vérifient $r > 1$ et $r > c$.

1. Dans le cas $r = 4$ et $c = 2$, conjecturer le comportement de la suite (p_n) pour les valeurs suivantes : $p_0 = 0$, $p_0 = 1$ et $p_0 = 5$.
2. On suppose que la suite (p_n) a une limite l : quelles sont les valeurs possibles pour l?
3. On suppose dans cette question que $0 < p_0 < r - c$.
   (a) En étudiant la fonction $f(x) = \frac{r\,x}{x+c}$ sur l'intervalle $[0, r-c]$, montrer que tous les termes p_n de la suite sont dans $]0, r-c[$.
   (b) Démontrer que la suite (p_n) est croissante.
   (c) Démontrer que la suite (p_n) converge vers $r - c$.

La solution d'un élève de Terminale S aux questions 3.b et 3.c.

3(b) On a calculé que $p_{n+1} - p_n = \left(\dfrac{r}{p_n + c} - 1\right) p_n = \dfrac{r - c - p_n}{p_n + c}\, p_n$ et comme $r - c - p_n > 0$ on voit bien que (p_n) est croissante.

3(c) On sait que la suite (p_n) est croissante par la question 3(b) et elle est majorée par $r - c$. Le théorème du cours dit qu'une suite croissante et majorée est convergente donc la suite (p_n) est convergente et a une limite l. D'après la question 2 cette limite vaut 0 ou $r - c$. Comme tous les termes de (p_n) sont strictement positifs la limite vaut donc $r - c$.

Le travail à exposer devant le jury.

- Analyser la réponse proposée par l'élève.
- Présentez une solution aux questions 2 et 3(c) telle que vous la proposeriez à des élèves de Terminale S.
- Présentez deux ou trois exercices sur le thème *suites et fonctions*.