

Thème : équations différentielles

L'exercice.

Une loi physique permet d'affirmer que la vitesse de refroidissement d'un corps est proportionnelle à la différence entre la température de ce corps à l'instant t (exprimé en minutes) et la température constante de l'air ambiant : en notant $f(t)$ la température du corps à l'instant t , T la température de l'air et k le coefficient de proportionnalité, on a donc $f'(t) = k(f(t) - T)$. Ici, on supposera que le coefficient de proportionnalité k est constant.

1. Résoudre l'équation différentielle $f'(t) = k(f(t) - T)$.
2. Donner la solution particulière de cette équation différentielle qui prend la valeur T_0 à l'instant t_0 .
3. La température de votre logement est constante, égale à 20°C . Vous sortez un gâteau du four à 20h, et sa température est de 180°C ; à 20h30 elle est encore de 100°C .
 - (a) Déterminer la coefficient de proportionnalité k dans ce cadre.
 - (b) A quelle heure pourrez vous servir le gâteau à la température idéale, soit 25°C ?
 - (c) Pour pouvoir servir votre gâteau à 22h précises, vous le placez dès 20h sur le rebord de votre fenêtre, où l'air est à 0°C . Combien de temps devrez-vous le laisser dehors avant de le rentrer à l'intérieur pour le déguster à 22h à la température idéale? On supposera que le coefficient k est le même dehors et dedans.

La solution d'un élève de Terminale STL à la question 3.c.

Dehors, la température est de 0°C , donc la température du gâteau est $f(t) = ce^{-0,0231t}$, et on trouve la constante c parce que $f(0) = 180$ donc $c = 180$.

Si on rentre le gâteau après n minutes alors sa température est $180e^{-0,0231n}$, et ici on veut que la température soit idéale donc on trouve

$$180e^{-0,0231n} = 25 \quad \text{donc} \quad -0,0231n = \ln(25/180) = -1,974$$

donc $n = 85,458$. Alors si on rentre le gâteau après 85 minutes il est à température idéale. Mais 20h+85minutes ça fait pas 22h alors peut-être que le gâteau il va encore refroidir dedans. Avec la question 1 il aura la température

$$f(120) = (25 - 20)e^{-0,0231(120-85)} + 20 = 22,228$$

mais je ne sais pas comment faire.

Le travail à exposer devant le jury.

- Analyser la réponse proposée par l'élève.
- Présentez une solution aux questions 1. et 2. telle que vous la proposeriez à des élèves de Terminale STL.
- Présentez deux ou trois exercices sur le thème *équations différentielles*, dont l'un au moins au niveau BTS.