Master 2 Enseignement
T. Champion & S. Junca

# Dénombrements

## 1 Probabilités discrètes – exercices de mise en jambes

1. Mon voisin a deux enfants.
1- Le plus jeune est une fille, calculer la probabilité que l'autre soit aussi une fille.
2- L'un d'eux est une fille, quelle est la probabilité que l'autre soit aussi une fille ?

2. Soient $A$, $B$ et $C$ trois événements d'un espace probabilisé. On suppose que si $A$ et $B$ sont réalisés, alors $C$ est réalisé. Montrer alors que $P(A) + P(B) \leq 1 + P(C)$.

3. *Un problème du Chevalier de Méré.* Qu'est-ce qui est le plus probable : sortir au moins un 6 en lançant 4 fois un dé ou sortir au moins un double 6 en lançant 24 fois deux dés ?

4. Deux dés sont lancés $n$ fois. Quel est le plus petit entier $n$ pour que la probabilité d'obtenir au moins un double 6 soit supérieure à 0,5 ?

5. Soient $A$ et $B$ deux événements disjoints, à quelle condition sont-ils indépendants ?

## 2 Probabilités conditionnelles – exercices classiques

1. Une personne choisie au hasard parmi la population de la région passe un test pour dépister une maladie. Dans cette région, on a établi que :
- si une personne a la maladie, alors le test est positif dans 96% des cas,
- si une personne n'a pas la maladie, alors le test est négatif dans 94% des cas.
Le résultat du test est positif, quelle est la probabilité que cette personne soit atteinte de la maladie ? On traitera deux cas: d'abord le cas où la proportion de malades dans la population est égale à 5%, puis le cas où il est égal à 60%.

2. Une information booléenne (oui/non), supposée vraie, passe par $n$ intermédiaires avant de me parvenir. Sachant que chaque personne intermédiaire ment avec la probabilité $p$, quelle est la probabilité $p_n$ que je reçoive la bonne information ? Calculer $\lim p_n$.
*indication: on exprimera $p_n$ en fonction de $p_{n-1}$.*

3. *Exercice hors probabilités discrètes, mais illustrant bien les probabilités conditionnelles.* On prend deux nombres au hasard et de manière indépendante dans $[0, 1]$. On sait que le plus petit des deux est supérieur à $\alpha$.
Quelle est la probabilité que le second soit supérieur à $\beta$ ? (On a bien sûr $0 < \alpha < \beta < 1$.)

# 3 Variables aléatoires discrètes

1. Démontrer la formule de Poincaré (dite aussi formule du crible) : étant donnés $n$ événements $A_1$, $A_2$, ... $A_n$ d'un espace probabilisé, on a

$$
\begin{aligned}
& P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = \\
= \; & \sum_i P(A_i) - \sum_{i_1<i_2} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{i_1<i_2<i_3} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) + ... \\
& +(-1)^n \sum_{i_1<...<i_{n-1}} P(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_{n-1}}) + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) \\
= \; & \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{\{i_1, ..., i_k\} \subset [1,n] \\ \mathrm{Card}(\{i_1, ..., i_k\}) = k}} P(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}).
\end{aligned}
$$

*Indication: à un évènement $A$ on peut associer la variable aléatoire $1_A$ (qui vaut un si $A$ est réalisé, 0 sinon). On peut alors utiliser des règles de calcul telle que $1_{A \cap B} = 1_A \, 1_B$, $1_{\overline{A}} = 1 - 1_A$, etc..*

2. On tire au hasard un nombre $X$ dans $\{1, ..., n\}$ puis au hasard un nombre $Y$ dans $\{1, ..., X\}$. Donner la loi de $Y$.

3. *La loi géométrique.* Dans une urne, il y a une proportion $p$ de boules noires et $q = 1 - p$ de boules blanches. On tire une boule, si elle est noire on arrête, sinon, on la remet dans l'urne et on recommence. Soit $X$ la v.a. donnant le nombre de tirages nécessaires pour s'arrêter.
Déterminer la loi de $X$, son espérance et sa variance.

4. Soit $X$ et $Y$ deux v.a. indépendantes de même loi géométrique de paramètre $p$.
1- Déterminer la loi de la v.a. $Q = \frac{X}{Y}$.
2- Calculer l'espérance de $Q$ et montrer que $\mathbb{E}(Q) > 1$.

5. *La loi de Poisson.* Soit $n$ un entier non nul et $\lambda > 0$ fixé. On pose $p = \lambda/n$ et on note $X_n$ une v.a.r. de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
1) Soit $k$ un entier fixé et $n \geq k$. Montrer que $P(X_n = k) \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ lorsque $n \to \infty$. (indication: on peut s'en sortir sans la formule de Stirling!)
2) Vérifier que $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$. Cette loi est appelée loi de Poisson de paramètre $\lambda$.
3) Calculer, si existence, l'espérance et la variance d'une v.a.r. qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$.
4) Soit $X$ et $Y$ deux v.a.r. indépendantes de loi de Poisson respectivement de paramètre $\lambda$ et $\mu$. Déterminer la loi de $Z = X + Y$.