**Banque « Agro-Véto »**
**B-MP16**

# ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES-PHYSIQUE

Durée : 3 heures

***L'usage de la calculatrice, d'abaques et de tables est <u>interdit</u> pour cette épreuve.***

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

*Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le chef de centre qui vérifiera et éventuellement remplacera son sujet.*

## PARTIE PHYSIQUE

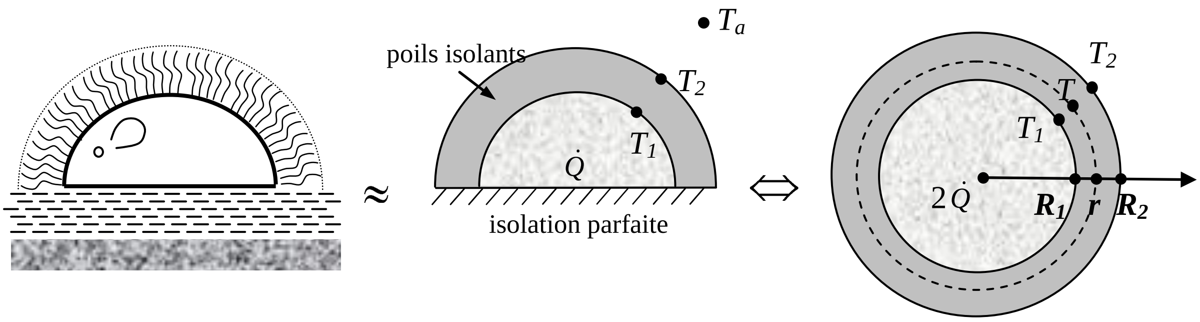
Cette partie est notée sur 8 points.

**Boule de poils et boule de glace**
**Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment**
**Aucun calcul numérique n'est demandé.**

### A) Transferts thermiques en régime permanent

Un animal pourvu d'une épaisse fourrure somnole sur un lit de feuilles mortes et est exposé à une bise glaciale. La température de l'air froid est constante égale à $T_a$. On cherche à déterminer l'énergie qu'il doit dépenser pour assurer une température corporelle donnée.
On assimile l'animal à une demi-sphère de rayon $R_1$ de température uniforme $T_1$ entourée d'une coque hémisphérique d'isolant d'épaisseur $e$ et de conductivité $k$ constituée par ses poils. L'animal dégage un flux de chaleur constant $\dot{Q}$ .
On note $T_2$ la température, supposée uniforme, à l'extérieur de la couche isolante et $T$ la température à un rayon quelconque $r$ pour $R_1 < r < R_2 = R_1 + e$ .
On considère une isolation parfaite sur la base (au niveau du lit de feuilles mortes).

Le problème est équivalent à celui d'une sphère entière dégageant un flux de chaleur égal à $2\dot{Q}$ .




1) Exprimer, à l'aide de la loi de Fourier, le flux de chaleur sortant à travers une sphère de rayon $r$ pour $R_1 < r < R_2$ .
2) Ecrire et intégrer l'équation exprimant que ce flux de chaleur est indépendant de $r$ et est égal à $2\dot{Q}$ .
3) En déduire la relation entre $\dot{Q}$ , $T_1$-$T_2$ , $k$, $R_1$ et $R_2$.

4) On appelle $R_{mg}=\sqrt{R_1 R_2}$ la moyenne géométrique de $R_1$ *et* $R_2$. Montrer que le flux de chaleur qui traverse la fourrure vaut $\dot{Q} = 2\pi R_{mg}^2 k \dfrac{T_1 - T_2}{e}$ .

La densité de flux de chaleur (flux de chaleur par unité de surface) entre la surface extérieure de la fourrure et l'air vaut : $h\,(T_2 - T_a)$ où $h$ est le coefficient de transfert de chaleur.

5) Montrer que le flux de chaleur traversant la fourrure et passant ensuite dans l'air peut se mettre sous la forme : $\dot{Q} = \dfrac{T_1 - T_a}{R_{th}}$ où $R_{th}$ est une fonction de $R_{mg}$, $R_2$, $k$, $e$ et $h$.
Interpréter l'expression de $R_{th}$.

6) Indiquer dans un tableau les unités (dans le système international) des grandeurs suivantes (vous pouvez utiliser des unités fondamentales et dérivées) :

| $r$ | $t$ | $\dot{Q}$ | $k$ | $h$ | $R_{th}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

## B) Transferts thermiques en régime transitoire

Un glacier a l'idée de vendre des boules de glace sphériques entièrement entourées d'une gaufrette très légère qui fait office d'isolant. La boule de glace, initialement à $T_0$ = -20°C, est exposée à de l'air à $T_a$ =20°C. La température de la boule de glace : $T_1$ est supposée être toujours uniforme mais elle évolue au cours du temps; sur un intervalle de temps $dt$ sa température augmente de $dT_1$.

Pour simplifier l'analyse on suppose que l'eau est sous forme solide de -20°C à $T_f \approx 0$°C (en réalité la présence de sucre dissous modifie l'équilibre liquide/solide) et fond à température constante $T_f \approx 0$°C avec une chaleur latente massique de fusion notée $L$. La boule de crème glacée a une masse $m$ et une capacité thermique massique $c$. Elle contient $\omega$=50% d'eau en masse.

Le flux de chaleur traversant la gaufrette et passant ensuite dans l'air peut s'exprimer sous la forme : $\dot{Q} = \dfrac{T_1 - T_a}{R_{th}}$ où $R_{th}$ est une résistance thermique.

7) En utilisant le premier principe de la thermodynamique, écrire l'équation différentielle permettant de prédire l'évolution temporelle de $T_1$ avant que la glace ne commence à fondre ($T_1 < T_f$ ). On écrira cette équation sous la forme :
$\dfrac{dT_1}{dt} = a - b.T_1$ ; exprimer $a$ et $b$ en fonction de $T_a$ , $m$, $c$, et $R_{th}$ .

8) Résoudre cette équation différentielle pour en déduire l'expression de $T_1$ en fonction de $t$, $T_0$ , $T_a$ , $m$, $c$ et $R_{th}$ .

9) Exprimer la durée au bout de laquelle la glace commence à fondre (c'est-à-dire atteint $T_f$ ) en fonction de $T_a$ , $T_0$ , $T_f$ , $m$, $c$ et $R_{th}$ .

10) Exprimer le temps que la glace met à fondre en fonction de $T_a$ , $T_f$ , $m$, $L$, $\omega$ et $R_{th}$ .

## PARTIE MATHÉMATIQUES

Cette partie est notée sur 12 points.

Ce sujet comporte *3 parties indépendantes* (sauf le 3c de l'exercice de probabilités qui utilise le 5 de l'analyse) et *2 annexes* : Table de Loi normale et Table de la loi de Poisson.
*NB : Tous les résultats seront laissés sous forme d'une expression formelle contenant des puissances, des fractions, des factorielles, des logarithmes ou des exponentielles.*
*On prendra* $e \approx 2.7$ , $1/e \approx 1/3$

### Premier exercice: Analyse

Soit $f$ la fonction de la variable réelle $x$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (1 + x + \frac{x^2}{2})e^{-x}$$

1) Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

2) Etablir le tableau des variations de $f$, et calculer ses limites aux bornes de l'ensemble de définition.

3) Soit $C$ la représentation graphique de $f$ dans un repère orthonormé d'unité 1cm. Donner l'équation de la tangente $T$ à $C$ au point d'abscisse $x = 0$, ainsi que la position de la courbe par rapport à sa tangente.

4) Soit $A$ l'aire située sous la courbe $C$, délimitée par les droites $x=0$ et $x=1$. A l'aide d'une double intégration par parties, calculer la mesure de l'aire $A$.

5) Calculer $f(-1)$ en prenant $1/e \approx 0.37$. Faire une représentation graphique, donnant l'allure de $C$, $T$, et $A$. On donne

$f(6.3) = 0.05$ ; $f(2) = 0.7$ ; $f(1) = 0.92$.

### Deuxième exercice : Probabilités

Dans un club de tir, un tireur s'entraîne sur une cible très éloignée. Il dispose d'un nombre $n$ de balles ($n > 10$), ses tirs sont supposés indépendants, et à chaque tir, la probabilité qu'il touche la cible est $p$ avec $1/100 < p < 1/5$. Lorsqu'il a épuisé toutes ses balles, il reprend sa cible et compte le nombre $X$ d'impacts sur celle-ci.

1) a) Donner, en justifiant, la loi de $X$, son espérance et sa variance, en fonction de $n$ et $p$.

   b) S'il a strictement moins de 3 impacts sur sa cible, le tireur se sent humilié. Donner en fonction de $n$ et $p$ la probabilité $p_H$ pour qu'il reparte la tête haute, c'est-à-dire qu'il ait au moins trois impacts sur sa cible.

2) Dans cette question, le tireur est expérimenté et $p = 1/10$ et $n = 100$.

a) Justifier l'approximation de la loi de $X$ par une loi normale dont on donnera l'espérance et l'écart type.

b) Calculer $p_H$ en utilisant la table fournie.

3) Dans cette question, le tireur débute et $p$ =1/50 et $n$ = 100.

a) Justifier l'approximation de la loi de $X$ par une loi de Poisson dont on donnera l'espérance et la variance.

b) Calculer $p_H$ en utilisant la table fournie.

c) Dans cette question, on a toujours $p$ =1/50 et $n$ est maintenant inconnu, la loi de $X$ est toujours approchée par une loi de Poisson.
En utilisant le graphique de la dernière question d'analyse, trouver $n$ pour que $p_H$ soit supérieure à 95%.

## Troisième exercice : Algèbre linéaire

Dans $R^3$ muni de sa base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on note $f$ l'endomorphisme défini par :

$$f(\vec{i}) = \vec{i} + \vec{k}$$

$$f(\vec{j}) = \vec{j}$$

$$f(\vec{k}) = \vec{i} - \vec{k}$$

1) Donner la matrice de $A$ dans la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
2) On donne :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

${}^tD$ est la transposée de $D$.

Calculer, lorsque cela est possible, les produits matriciels suivants :
$BC$ ; ${}^tDB$ ; ${}^tCA$ ; $B^2$ ; $DB$ ; $A^2$ ; ${}^tCAC$ ; $CD$.
Si certains calculs ne sont pas possibles, les identifier et justifier.

3) $B$ est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.

4) $A$ est-elle diagonalisable ? Donner ses valeurs propres et les vecteurs propres associés.

**FIN DU SUJET**