

MATHEMATIQUES - PHYSIQUE

Durée : 3 heures

L'usage d'une calculatrice, d'abaques et de tables est interdit pour cette épreuve.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le chef de centre qui vérifiera et éventuellement remplacera son sujet.

PARTIE MATHÉMATIQUES

Cette partie est notée sur 12 points.

Exercice 1. On considère les fonctions f et g définies sur $]0, \frac{\pi}{4}]$ par

$$f(x) = \begin{cases} \int_{x^2}^x \frac{1}{\sqrt{\sin(t)}} dt, & \text{si } x \in]0, \frac{\pi}{4}] \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$
$$g(x) = \int_{x^2}^x \frac{\cos(t)}{\sqrt{\sin(t)}} dt, \quad x \in [0, \frac{\pi}{4}].$$

1. Montrer que pour $x \in]0, \frac{\pi}{4}]$

$$g(x) \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{2}} g(x).$$

2. Calculer $g(x)$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

3. Montrer en utilisant les questions 1 et 2 que f est continue en 0.

4. Montrer en utilisant les questions 1 et 2 que f n'est pas dérivable à droite en 0.

5. Calculer la dérivée de f sur $]0, \frac{\pi}{4}]$.

Exercice 2. Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose $Y = \cos(X\pi)$.

1. Écrire la loi de X .

2. Quelles sont les valeurs possibles de Y ?

3. Montrer que $\mathbb{P}(Y = 1) = e^{-\lambda} \frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2}$.

4. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Partie B Soit Z une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1.

1. Donner une densité de Z .

2. Déterminer l'ensemble des réels positifs r tels que $\cos(r\pi) \in [\frac{1}{2}, 1]$ et $\sin(r\pi) \geq 0$.

3. On considère l'événement $A = \{\cos(Z\pi) \in [\frac{1}{2}, 1] \text{ et } \sin(Z\pi) \geq 0\}$.

Montrer que $\mathbb{P}(A) = \frac{1 - e^{-1/3}}{1 - e^{-2}}$.

Exercice 3. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de M .
2. La matrice M est-elle inversible ?
3. Déterminer les espaces propres associés aux valeurs propres de M .
4. La matrice M est-elle diagonalisable ?