BENSA
B – 214MP

MATHÉMATIQUES – PHYSIQUE

Durée : 3 heures

L'usage d'une calculatrice est <u>interdit</u> pour cette épreuve.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le chef de centre qui contrôlera et éventuellement remplacera son sujet.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La partie Mathématiques est notée sur 12 points, la partie Physique est notée sur 8 points.

MATHÉMATIQUES

Les trois parties sont indépendantes.

ANALYSE

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ si $x\neq 0$,

et $f(0)=1$.

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

1) Développement limité de ln(1+x).

Donner un développement limité de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0, à l'ordre 3.

2) Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit g définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$g(x)=\ln(1+x)-\frac{2x}{2+x}.$$

a) Montrer que g est dérivable et calculer $g'(x)$.

b) Prouver que pour tout $x>0$: $\quad 0\leq g'(x)\leq \dfrac{x^2}{4}$.

c) En déduire que pour tout $x>0$: $\quad 0\leq g(x)\leq \dfrac{x^3}{12}$.

3) Variations de la fonction f.

a) Montrer que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et calculer sa dérivée.

b) Etablir que pour tout réel $x\geq 0$:

$g(x)\leq \ln(1+x)-\dfrac{x}{1+x}$. En déduire le sens de variation de f.

4) Etude de f en $+\infty$ et en 0.

a-1) Etudier la limite de f en $+\infty$.

a-2) Déterminer la limite de f en 0, f est-elle continue en 0?

b) Prouver que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

c) En déduire que f est dérivable en 0 et calculer sa dérivée en ce point. Donner une équation de la tangente T à C en 0 et préciser la position de C par rapport à T.

5) Dresser le tableau des variations de f, puis donner l'allure de C et tracer T.

PROBABILITES

Dans le tableau rectangulaire ci-dessous, X est le numéro de la ligne, 1 ou 2, et Y est le numéro de la colonne, 1, 2, ou 3.

X / Y	Y=1	Y=2	Y=3
X=1	-9	-6	+12
X=2	15	0	-9

On considère le jeu suivant :
Deux tirages au sort indépendants, l'un donnant la valeur de X et l'autre de Y, permettent à un joueur de se voir attribuer la somme G inscrite dans la case correspondante, gain si celle-ci est strictement positive, perte si elle est strictement négative, ou rien s'il tombe sur la case 0.

1) Tirages équiprobables.

Dans cette partie, X et Y sont tirés de manière équiprobable, c'est-à-dire que X vaut 1 ou 2 avec la probabilité 1/2, et Y vaut 1 ; 2 ou 3 avec la probabilité 1/3.

a) Calculer $P(G > 0)$, la probabilité que le gain soit strictement positif.

b) Calculer l'espérance de G. Donner l'expression de sa variance, sans effectuer le calcul.

c) Pour 1 euro, le joueur a le droit de jouer 2 fois, c'est-à-dire qu'il obtiendra deux gains $G1$ et $G2$ qu'il va cumuler. Les tirages sont supposés indépendants.

Son bilan financier est $B = G1 + G2 - 1$. On dit que le jeu est équitable si le bilan financier est d'espérance nulle. Ce jeu est-il équitable ?

d) Jo joue à ce jeu, et il décide d'adopter la stratégie suivante : s'il gagne la première fois, c'est-à-dire si $G1 > 0$, il renonce à son deuxième essai, sinon il rejoue. Cette stratégie vous parait-elle assurer un meilleur bilan financier plutôt que de jouer les deux fois ?