

La théorie du choix social
—
une brève présentation . . .

Thierry Champion

Laboratoire IMATH (Institut de Mathématiques de Toulon et du Var),
Université de Toulon

Plan de l'exposé

- ▶ Introduction : théorie du choix social ?
- ▶ Exemples de méthodes de choix social :
 - ▶ scrutins nationaux;
 - ▶ méthode de Condorcet;
 - ▶ méthode de Borda.
- ▶ Théorème d'impossibilité d'Arrow :
 - ▶ hypothèses;
 - ▶ exemples de Condorcet;
 - ▶ autre hypothèse : monotonie.
- ▶ Jugement majoritaire
- ▶ Et un peu de vote stratégique.

Bibliographie

un livre :

MAJORITY JUDGEMENT, *Measuring, Ranking, and Electing*,
Michel Balinski and Rida Laraki,
MIT Press.

un article de recherche :

A theory of measuring, electing and ranking,
Michel Balinski and Rida Laraki,
*Proceedings of the National Academy of Sciences
USA, vol. 104, no. 21, 8720-8725*.

... et quelques discussions avec Rida Laraki

Introduction

définition par Balinski et Laraki :

“The Theory of Social Choice concerns methods for amalgamating the appreciations or evaluations of many individuals into one collective appreciation or evaluation.”

Introduction

définition par Balinski et Laraki :

“The Theory of Social Choice concerns methods for amalgamating the appreciations or evaluations of many individuals into one collective appreciation or evaluation.”

Applications : décisions ou élections politiques, classement de “candidats” par un jury . . .

Introduction

définition par Balinski et Laraki :

“The Theory of Social Choice concerns methods for amalgamating the appreciations or evaluations of many individuals into one collective appreciation or evaluation.”

Applications : décisions ou élections politiques, classement de “candidats” par un jury . . .

Travaux et résultats célèbres par :

- ▶ Jean-Charles, chevalier de Borda (1733-1799)
- ▶ Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat, marquis de Condorcet (1743-1793)
- ▶ Kenneth Arrow (1921-) : le théorème d'impossibilité d'Arrow

Introduction - premier exemple

trois systèmes de vote pour l'élection des députés :

- ▶ système français : majorité à deux tours;
- ▶ système anglais : majorité à un tour.
- ▶ système australien : vote par liste classée.

Introduction - premier exemple

trois systèmes de vote pour l'élection des députés :

- ▶ système français : majorité à deux tours;
- ▶ système anglais : majorité à un tour.
- ▶ système australien : vote par liste classée.

Exemple : quel fruit gagne ?

nombre de votants	préférences
1	<i>Ananas > Banane > Cerise</i>
7	<i>Ananas > Cerise > Banane</i>
7	<i>Banane > Cerise > Ananas</i>
6	<i>Cerise > Banane > Ananas</i>

Le gagnant de Condorcet

Définition (Lull 1299, Condorcet 1789):

le **gagnant de Condorcet**, si il existe, est le candidat qui gagne contre tous les autres en “*un contre un*”.

Le gagnant de Condorcet

Définition (Lull 1299, Condorcet 1789):

le **gagnant de Condorcet**, si il existe, est le candidat qui gagne contre tous les autres en “*un contre un*”.

Exemple:

nombre de votants	préférences
1	<i>Ananas > Banane > Cerise</i>
7	<i>Ananas > Cerise > Banane</i>
7	<i>Banane > Cerise > Ananas</i>
6	<i>Cerise > Banane > Ananas</i>

... Quel fruit est le gagnant de Condorcet ?

Le paradoxe de Condorcet

Un autre exemple, par Condorcet lui-même :

nombre de votants	préférences
23	<i>Pticachou > Bulzibar > Cartapuce</i>
2	<i>Bulzibar > Pticachou > Cartapuce</i>
17	<i>Bulzibar > Cartapuce > Pticachou</i>
10	<i>Cartapuce > Pticachou > Bulzibar</i>
8	<i>Cartapuce > Bulzibar > Pticachou</i>

... y a-t-il un gagnant de Condorcet ?

La méthode de Borda

Définition (Cusanus 1433, Borda 1784):

On suppose qu'il y a k candidats.

Chaque votant classe les candidats, et donne

k points au candidat qu'il classe premier,

k points à celui qu'il classe deuxième,

... 1 point à celui qu'il classe dernier.

Le score d'un candidat est celui obtenu en additionnant tous les points qu'il reçoit :

$$\sum_{n=1}^k n x_n = k x_k + (k-1) x_{k-1} + \dots + 2 x_2 + x_1$$

*où x_n représente le nombre de fois où le candidat reçoit n points. Le **gagnant de Borda** est le candidat qui a le plus de points.*

La méthode de Borda

Exemple:

nombre de votants	préférences
1	<i>Ananas > Banane > Cerise</i>
7	<i>Ananas > Cerise > Banane</i>
7	<i>Banane > Cerise > Ananas</i>
6	<i>Cerise > Banane > Ananas</i>

La méthode de Borda

Exemple:

nombre de votants	préférences
1	<i>Ananas > Banane > Cerise</i>
7	<i>Ananas > Cerise > Banane</i>
7	<i>Banane > Cerise > Ananas</i>
6	<i>Cerise > Banane > Ananas</i>

on obtient le classement :

Cerise (47) > Banane (42) > Ananas (37)

La méthode de Borda

Exemple:

nombre de votants	préférences
23	<i>Pticachou > Bulzibar > Cartapuce</i>
2	<i>Bulzibar > Pticachou > Cartapuce</i>
17	<i>Bulzibar > Cartapuce > Pticachou</i>
10	<i>Cartapuce > Pticachou > Bulzibar</i>
8	<i>Cartapuce > Bulzibar > Pticachou</i>

La méthode de Borda

Exemple:

nombre de votants	préférences
23	<i>Pticachou > Bulzibar > Cartapuce</i>
2	<i>Bulzibar > Pticachou > Cartapuce</i>
17	<i>Bulzibar > Cartapuce > Pticachou</i>
10	<i>Cartapuce > Pticachou > Bulzibar</i>
8	<i>Cartapuce > Bulzibar > Pticachou</i>

on obtient le classement :

Bulzibar (129) > Pticachou (118) > Cartapuce (113)

Un autre paradoxe de Condorcet

un exemple par Condorcet :

votants	2	4	5	29	3	3	2	32	6	5	4	5
premier choix	A	A	A	A	A	A	B	B	B	C	C	C
second choix	B	B	C	C	D	D	A	C	D	A	B	B
troisième choix	C	D	B	D	B	C	D	D	A	B	A	D
dernier choix	D	C	D	B	C	B	C	A	C	D	D	A

Un autre paradoxe de Condorcet

un exemple par Condorcet :

votants	2	4	5	29	3	3	2	32	6	5	4	5
premier choix	A	A	A	A	A	A	B	B	B	C	C	C
second choix	B	B	C	C	D	D	A	C	D	A	B	B
troisième choix	C	D	B	D	B	C	D	D	A	B	A	D
dernier choix	D	C	D	B	C	B	C	A	C	D	D	A

Le gagnant de Borda est C alors que le gagnant de Condorcet est A !!

Un autre paradoxe de Condorcet

un exemple par Condorcet :

votants	2	4	5	29	3	3	2	32	6	5	4	5
premier choix	A	A	A	A	A	A	B	B	B	C	C	C
second choix	B	B	C	C	D	D	A	C	D	A	B	B
troisième choix	C	D	B	D	B	C	D	D	A	B	A	D
dernier choix	D	C	D	B	C	B	C	A	C	D	D	A

Le gagnant de Borda est C alors que le gagnant de Condorcet est A !!

Si D abandonne, le gagnant de Borda est A !!!

Théorème d'impossibilité d'Arrow : le cadre

Kenneth Arrow (1921-) :

Social choice and individual values,
K. Arrow, *Yale University Press, 1951*

Théorème d'impossibilité d'Arrow : le cadre

Kenneth Arrow (1921-) :

Social choice and individual values,
K. Arrow, Yale University Press, 1951

Données : chaque votant v possède un ordre de préférences
strictes :

$$B >_v A >_v C$$

La collection de ces votes forme un **profil de préférences**.

Théorème d'impossibilité d'Arrow : le cadre

Kenneth Arrow (1921-) :

Social choice and individual values,
K. Arrow, Yale University Press, 1951

Données : chaque votant v possède un ordre de préférences **strictes** :

$$B >_v A >_v C$$

La collection de ces votes forme un **profil de préférences**.

Objectif : mettre au point une **fonction de classement** ou *classement social* :

$$B >_s A >_s C$$

Théorème d'impossibilité d'Arrow : le cadre

Hypothèses

- ▶ **Universalité** : la fonction de classement doit être définie pour tous les profils.

Théorème d'impossibilité d'Arrow : le cadre

Hypothèses

- ▶ **Universalité** : la fonction de classement doit être définie pour tous les profils.
- ▶ **Unanimité** : si $A >_v B$ pour tous les votants, alors $A >_s B$.

Théorème d'impossibilité d'Arrow : le cadre

Hypothèses

- ▶ **Universalité** : la fonction de classement doit être définie pour tous les profils.
- ▶ **Unanimité** : si $A >_v B$ pour tous les votants, alors $A >_s B$.
- ▶ **Indépendance aux alternatives non pertinentes (IIA)** : le fait que $A >_s B$ ne dépend que du classement relatif de A et B pour les votants.

Théorème d'impossibilité d'Arrow : le cadre

Hypothèses

- ▶ **Universalité** : la fonction de classement doit être définie pour tous les profils.
- ▶ **Unanimité** : si $A >_v B$ pour tous les votants, alors $A >_s B$.
- ▶ **Indépendance aux alternatives non pertinentes (IIA)** : le fait que $A >_s B$ ne dépend que du classement relatif de A et B pour les votants.
- ▶ **Absence de dictateur** : la fonction de vote n'est pas déterminée par les préférences de l'un des votants.

Exemples - méthode de Condorcet

nombre de votants	préférences
23	<i>Pticachou</i> > <i>Bulzibar</i> > <i>Cartapuce</i>
2	<i>Bulzibar</i> > <i>Pticachou</i> > <i>Cartapuce</i>
17	<i>Bulzibar</i> > <i>Cartapuce</i> > <i>Pticachou</i>
10	<i>Cartapuce</i> > <i>Pticachou</i> > <i>Bulzibar</i>
8	<i>Cartapuce</i> > <i>Bulzibar</i> > <i>Pticachou</i>

méthode de Condorcet :

Pticachou >_S *Bulzibar* >_S *Cartapuce* >_S *Pticachou*

Exemples - méthode de Condorcet

nombre de votants	préférences
23	<i>Pticachou</i> > <i>Bulzibar</i> > <i>Cartapuce</i>
2	<i>Bulzibar</i> > <i>Pticachou</i> > <i>Cartapuce</i>
17	<i>Bulzibar</i> > <i>Cartapuce</i> > <i>Pticachou</i>
10	<i>Cartapuce</i> > <i>Pticachou</i> > <i>Bulzibar</i>
8	<i>Cartapuce</i> > <i>Bulzibar</i> > <i>Pticachou</i>

méthode de Condorcet :

Pticachou >_S *Bulzibar* >_S *Cartapuce* >_S *Pticachou*

La méthode de Condorcet ne satisfait pas l'Universalité.

Exemples - méthode de Bordat

number	2	4	5	29	3	3	2	32	6	5	4	5
rank 1	A	A	A	A	A	A	B	B	B	C	C	C
rank 2	B	B	C	C	D	D	A	C	D	A	B	B
rank 3	C	D	B	D	B	C	D	D	A	B	A	D
rank 4	D	C	D	B	C	B	C	A	C	D	D	A

méthode de Condorcet : $A >_S C >_S B >_S D$

méthode de Borda : $C >_S B >_S A >_S D$

Exemples - méthode de Borda

number	2	4	5	29	3	3	2	32	6	5	4	5
rank 1	A	A	A	A	A	A	B	B	B	C	C	C
rank 2	B	B	C	C	D	D	A	C	D	A	B	B
rank 3	C	D	B	D	B	C	D	D	A	B	A	D
rank 4	D	C	D	B	C	B	C	A	C	D	D	A

méthode de Condorcet : $A >_S C >_S B >_S D$

méthode de Borda : $C >_S B >_S A >_S D$

si D abandonne, la méthode de Borda donne : $A >_S B >_S C$

Exemples - méthode de Borda

number	2	4	5	29	3	3	2	32	6	5	4	5
rank 1	A	A	A	A	A	A	B	B	B	C	C	C
rank 2	B	B	C	C	D	D	A	C	D	A	B	B
rank 3	C	D	B	D	B	C	D	D	A	B	A	D
rank 4	D	C	D	B	C	B	C	A	C	D	D	A

méthode de Condorcet : $A >_S C >_S B >_S D$

méthode de Borda : $C >_S B >_S A >_S D$

si D abandonne, la méthode de Borda donne : $A >_S B >_S C$

La méthode de Borda ne vérifie pas l'Indépendance aux alternatives non pertinentes (IIA).

Le théorème d'impossibilité d'Arrow

Théorème (Théorème d'impossibilité d'Arrow)

Dès qu'il y a au moins 3 candidats et 2 votants, il n'existe pas de méthode de classement qui satisfait les principes suivants :

- ▶ *Universalité,*
- ▶ *Unanimité,*
- ▶ *Indépendance aux alternatives non pertinentes,*
- ▶ *Etre non dictatorial.*

Preuve par Geanakoplos (2005)

On suppose qu'une fonction de classement vérifie

- ▶ Universalité,
- ▶ Unanimité,
- ▶ Indépendance aux alternatives non pertinentes,

alors elle est dictatoriale.

Preuve par Geanakoplos (2005)

On suppose qu'une fonction de classement vérifie

- ▶ Universalité,
- ▶ Unanimité,
- ▶ Indépendance aux alternatives non pertinentes,

alors elle est dictatoriale.

Etape 1

On considère un profil de préférence. Si un candidat B est soit premier soit dernier pour tous les votants, alors il en est de même pour le classement social.

Preuve par l'absurde !

Preuve par Geanakoplos (2005)

Etape 2

Il existe un profil Φ , un votant d et un candidat B , pour lesquels le classement social classe B dernier, mais en changeant uniquement son vote d peut faire passer B en premier.

Preuve par Geanakoplos (2005)

Etape 2

Il existe un profil Φ , un votant d et un candidat B , pour lesquels le classement social classe B dernier, mais en changeant uniquement son vote d peut faire passer B en premier.

Etape 3

Le votant d impose sa préférence entre les choix A et C à la fonction de classement pour tous les candidats A et C différents de B :

$$A >_d C \quad \Rightarrow \quad A >_S C$$

Preuve par Geanakoplos (2005)

Etape 2

Il existe un profil Φ , un votant d et un candidat B , pour lesquels le classement social classe B dernier, mais en changeant uniquement son vote d peut faire passer B en premier.

Etape 3

Le votant d impose sa préférence entre les choix A et C à la fonction de classement pour tous les candidats A et C différents de B :

$$A >_d C \quad \Rightarrow \quad A >_s C$$

Etape 4

Le votant d impose sa préférence entre A et B à la fonction de classement pour tout candidat A .

Autre propriété souhaitable : la monotonie

Exemple:

4	28	38	14	16
A	A	B	C	C
B	C	C	B	A
C	B	A	A	B

Qui est élu (dans le système majoritaire à deux tours) ?

Autre propriété souhaitable : la monotonie

Exemple:

4	28	38	14	16
A	A	B	C	C
B	C	C	B	A
C	B	A	A	B

Qui est élu (dans le système majoritaire à deux tours) ?

Presque pareil :

4	28	38	14	16
B	A	B	C	C
A	C	C	B	A
C	B	A	A	B

Qui est élu ?

Jugement majoritaire

Balinski - Laraki, 2007

Pour pallier aux défauts précédents :

évaluer (*i.e. noter*) les candidats plutôt que de les classer.

Utiliser *ensuite* l'évaluation (les notes) pour classer les candidats.

Jugement majoritaire

Balinski - Laraki, 2007

Pour pallier aux défauts précédents :

évaluer (*i.e. noter*) les candidats plutôt que de les classer.

Utiliser *ensuite* l'évaluation (les notes) pour classer les candidats.

Cette méthode satisfait :

- ▶ universalité
- ▶ unanimité
- ▶ indépendance aux alternatives non pertinentes (*en théorie*)
- ▶ absence de dictateur
- ▶ la monotonie

Jugement majoritaire

Bulletin de vote:
Élection du Président de la République 2007

*Pour présider la France,
ayant pris tous les éléments en compte,
je juge en conscience que ce candidat serait:*

	<i>Très Bien</i>	<i>Bien</i>	<i>Assez Bien</i>	<i>Passable</i>	<i>Insuffisant</i>	<i>A Rejeter</i>
Olivier Besancenot						
Marie-George Buffet						
Gérard Schivardi						
François Bayrou						
José Bové						
Dominique Voynet						
Philippe de Villiers						
Ségolène Royal						
Frédéric Nihous						
Jean-Marie Le Pen						
Arlette Laguiller						
Nicolas Sarkozy						

Cochez une seule mention dans la ligne de chaque candidat.

Ne pas cocher une mention dans la ligne d'un candidat revient à le Rejeter.

Jugement majoritaire

Definition

La note majoritaire d'un candidat est la médiane de ses notes. Dans le cas d'un nombre pair de votants, on choisit la plus petite des deux notes médianes.

Jugement majoritaire

Definition

La note majoritaire d'un candidat est la médiane de ses notes. Dans le cas d'un nombre pair de votants, on choisit la plus petite des deux notes médianes.

Cette méthode satisfait :

- ▶ universalité
- ▶ unanimité
- ▶ indépendance aux alternatives non pertinentes (*en théorie*)
- ▶ absence de dictateur
- ▶ la monotonie

Vote stratégique - un exemple

Adhésion à l'association de Yassine, Fanny et Marie

- ▶ Ehouarn et Carla veulent adhérer à l'association
- ▶ Yassine, Fanny et Marie votent en deux tours :
 - ▶ tour 1 : lequel des deux est susceptible d'adhérer ?
 - ▶ tour 2 : plutôt celui choisi au tour 1 ou personne ?

Vote stratégique - un exemple

Adhésion à l'association de Yassine, Fanny et Marie

- ▶ Ehouarn et Carla veulent adhérer à l'association
- ▶ Yassine, Fanny et Marie votent en deux tours :
 - ▶ tour 1 : lequel des deux est susceptible d'adhérer ?
 - ▶ tour 2 : plutôt celui choisi au tour 1 ou personne ?

Préférences :

	Yassine	Fanny	Marie
1er choix	Ehouarn	–	Carla
2nd choix	–	Ehouarn	Ehouarn
3ème choix	Carla	Carla	–

Pour aller plus loin

- ▶ La **page personnelle de Rida Laraki**, sur laquelle on peut trouver plusieurs articles (dont celui cité au début de cet exposé) et références sur le thème du choix social.
- ▶ Un **lien vers une petite vidéo** montrant par l'exemple que divers modes de scrutins amènent des résultats électoraux différents (voir les premiers exemples de cet exposé!).