

Analyse Numérique - TP 2

L2 MATHÉMATIQUES, 2017-2018

L'objet de ce TP est d'utiliser les interpolations polynômiales pour résoudre le problème :

Étant donné $n + 1$ points $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$, trouver une fonction $f : x \mapsto f(x)$ telle que $f(x_i) = y_i$ pour tout i .

Dans le répertoire TP-AN-2017 de votre espace de travail, enregistrez le fichier `tp2-1718.py` depuis le site

<http://champion.univ-tln.fr/>

en suivant les liens Enseignement puis Analyse Numérique de semestre 3.

Vous transmettez votre rapport par courriel à votre chargé de TP (`champion@univ-tln.fr` ou `galusins@univ-tln.fr` selon le cas) sous la forme : `tp2-VOTRENOM.pdf`.

Exercice 1.

- (1) Rappeler les définitions des polynômes d'interpolation de Lagrange et Hermite.
- (2) Lire et comprendre les deux fonctions du fichier `tp2-1718.py`.

Exercice 2. En utilisant les fonctions données dans le programme :

- (1) Programmer une fonction qui calcule la valeur du polynôme de Lagrange P qui interpole les points $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$ et $(3, 3)$.
Évaluer le polynôme P aux points : $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$.
- (2) Programmer une fonction qui calcule la valeur du polynôme de Hermite Q qui interpole les points $(-1, 0, 1)$ et $(2, 0, -1)$.
Évaluer le polynôme Q aux points : $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$.
- (3) Afficher sur le même graphique les courbes des deux polynômes ainsi obtenus sur l'intervalle $[-2, 4]$.

Exercice 3. Soit f la fonction de Runge $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

- (1) Programmer une fonction qui calcule la valeur du polynôme P_n d'interpolation de Lagrange de f avec n noeuds (points d'interpolation) équirépartis sur l'intervalle $[a, b] = [-5, 5]$, pour $n = 3, 4, 5$ et 8 .
Rappel. Les points x_0, \dots, x_k sont équirépartis dans l'intervalle $[a, b]$ si $x_0 = a$, $x_{i+1} = x_i + \delta$ pour tout $i \in \{0, \dots, k-1\}$ et $x_k = b$, avec δ bien choisi.
- (2) Dessiner dans un même plan les graphes de f et de P_n sur l'intervalle $[-5, 5]$.
- (3) Faire de même avec les polynômes H_n d'interpolation de Hermite.
- (4) Comparer ces deux résultats : pour cela, on tracera les graphes de f , P_n et H_n dans un même plan. On calculera aussi les écarts maximaux observés pour chaque méthode :

$$\|f - P\| = \max \{|f(x) - P(x)| : x \in X_{50}\}$$

où $X_{50} = \{-5 + \frac{k}{5} : 0 \leq k \leq 50\}$.

- (5) Répéter les questions précédentes en remplaçant les noeuds équirépartis par les noeuds de Chebychev définis par $x_i = \frac{1}{2} \left(a + b + (b - a) \cos \left(\frac{n-i}{n} \pi \right) \right)$ pour $i \in \{0, \dots, n\}$.