

## Analyse Numérique - TP 2 - corrigé

---

**Exercice 2.** En utilisant les fonctions données dans le programme :

- (1) Programmer une fonction qui calcule la valeur du polynôme de Lagrange  $P$  qui interpole les points  $(0, 2)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(2, 2)$  et  $(3, 3)$ .  
Évaluer le polynôme  $P$  aux points :  $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ .
- (2) Programmer une fonction qui calcule la valeur du polynôme de Hermite  $Q$  qui interpole les points  $(-1, 0, 1)$  et  $(2, 0, -1)$ .  
Évaluer le polynôme  $Q$  aux points :  $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ .
- (3) Afficher sur le même graphique les courbes des deux polynômes ainsi obtenus sur l'intervalle  $[-2, 4]$ .

**Corrigé de l'exercice 2.** Pour les codes Python, se reporter au fichier `tp2-1718-correc.py`.  
On obtient les courbes de la figure 1.

**Exercice 3.** Soit  $f$  la fonction de Runge  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

- (1) Programmer une fonction qui calcule la valeur du polynôme  $P_n$  d'interpolation de Lagrange de  $f$  avec  $n$  noeuds (points d'interpolation) équirépartis sur l'intervalle  $[a, b] = [-5, 5]$ , pour  $n = 3, 4, 5$  et  $8$ .  
*Rappel.* Les points  $x_0, \dots, x_k$  sont équirépartis dans l'intervalle  $[a, b]$  si  $x_0 = a$ ,  $x_{i+1} = x_i + \delta$  pour tout  $i \in \{0, \dots, k-1\}$  et  $x_k = b$ , avec  $\delta$  bien choisi.
- (2) Dessiner dans un même plan les graphes de  $f$  et de  $P_n$  sur l'intervalle  $[-5, 5]$ .

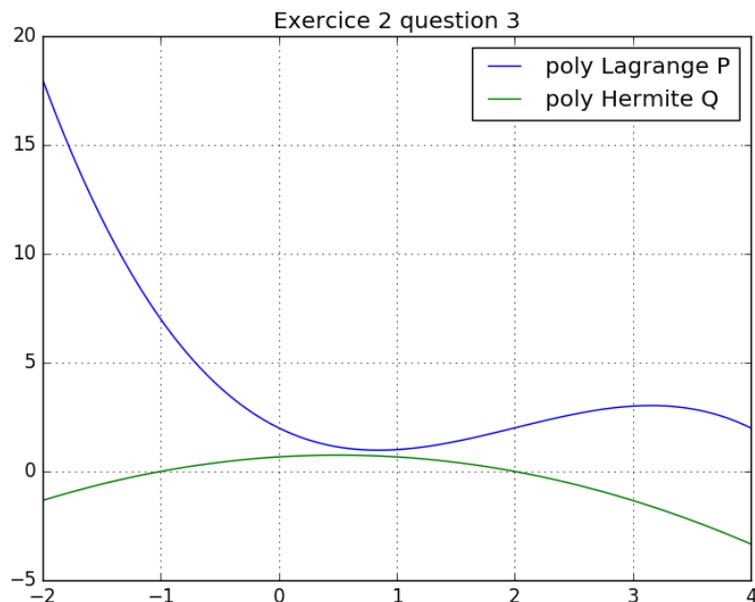


FIGURE 1. Exercice 2

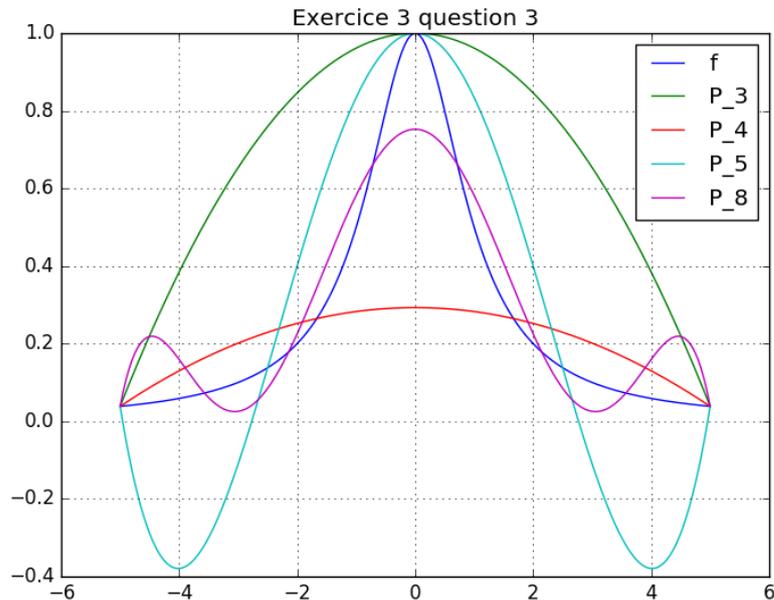


FIGURE 2. Exercice 3 question 2

- (3) Faire de même avec les polynômes  $H_n$  d'interpolation de Hermite.
- (4) Comparer ces deux résultats : pour cela, on tracera les graphes de  $f$ ,  $P_n$  et  $H_n$  dans un même plan. On calculera aussi les écarts maximaux observés pour chaque méthode :

$$\|f - P\| = \max \{|f(x) - P(x)| : x \in X_{50}\}$$

où  $X_{50} = \{-5 + \frac{k}{5} : 0 \leq k \leq 50\}$ .

- (5) Répéter les questions précédentes en remplaçant les noeuds équirépartis par les noeuds de Chebychev définis par  $x_i = \frac{1}{2} \left( a + b + (b - a) \cos \left( \frac{n - i}{n} \pi \right) \right)$  pour  $i \in \{0, \dots, n\}$ .

**Corrigé de l'exercice 3.** Pour les codes Python, se reporter au fichier `tp2-1718-correc.py`.

Pour la question 2 on obtient les courbes de la figure 2, sur laquelle on observe que le polynôme d'interpolation passe bien par les points imposés.

Pour la question 3 on obtient les courbes de la figure 3, sur laquelle on observe que le polynôme d'interpolation passe bien par les points imposés avec les bonnes dérivées.

Pour la question 4 on obtient les courbes de la figure 4. Pour ce qui concerne les écarts maximaux, on voit que ceux-ci ne diminuent pas quand  $n$  augmente, et ont même tendance à "exploser" pour  $n = 50$ , ce qui confirme bien le résultat annoncé en cours pour cette fonction.

Pour la question 5, on obtient les figures 5 (pour les polynômes d'interpolation de Lagrange) et 6 (pour ceux de Hermite), et on voit que les écarts tendent vers 0 quand  $n$  grandit, ce qui confirme le résultat théorique.

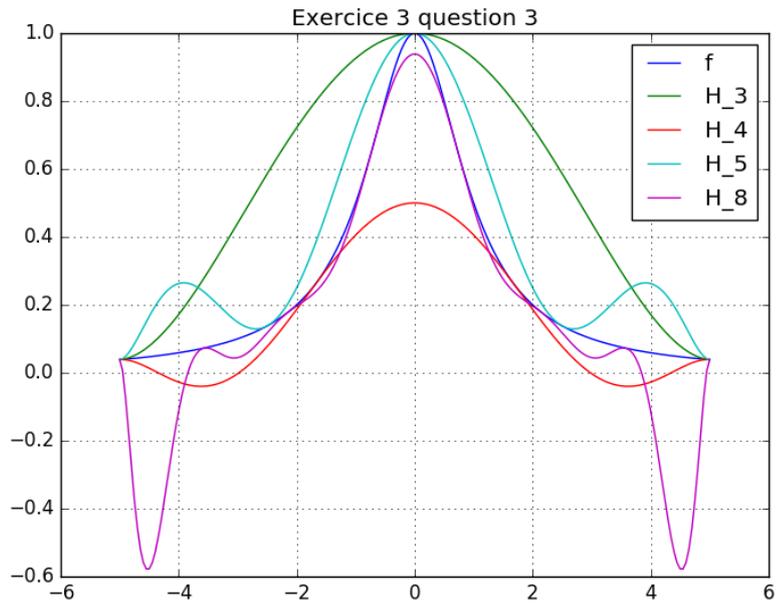


FIGURE 3. Exercice 3 question 3

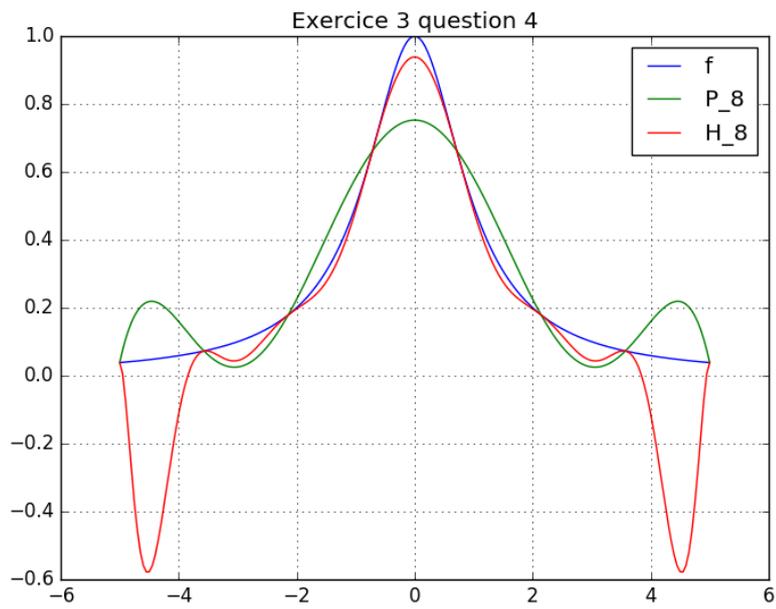


FIGURE 4. Exercice 3 question 4

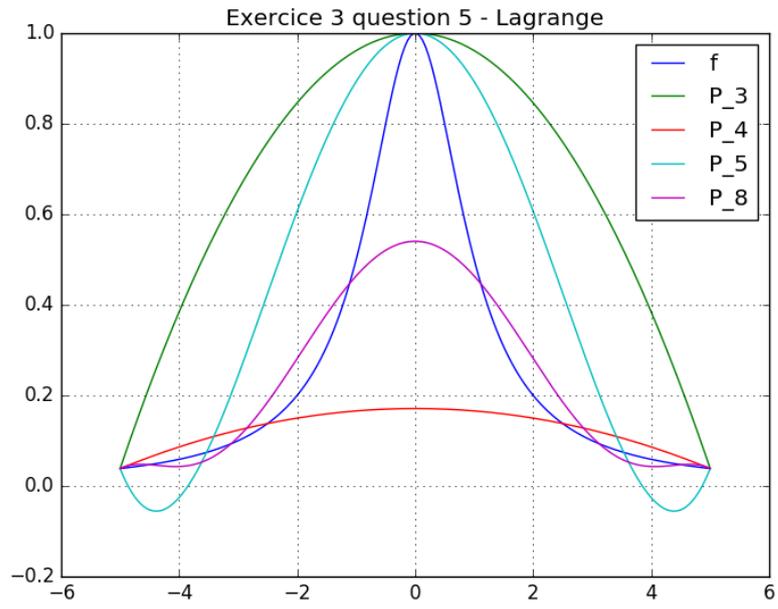


FIGURE 5. Exercice 3 question 5

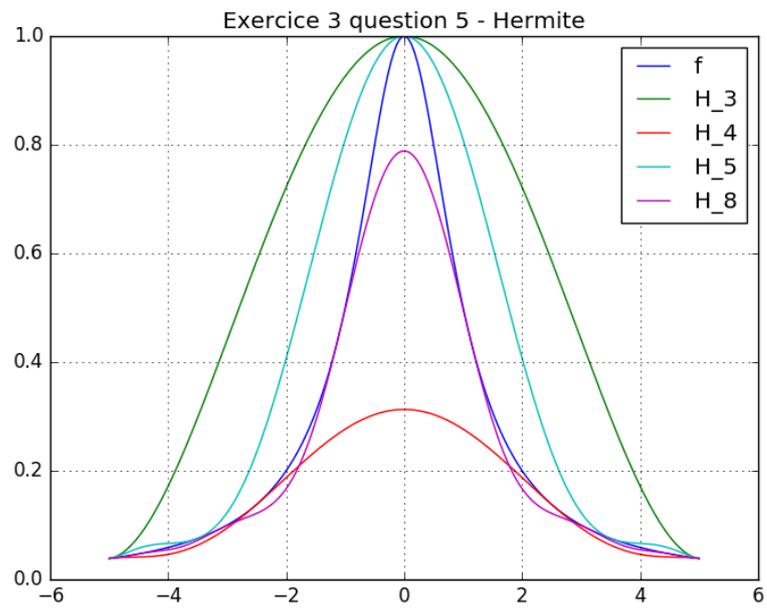


FIGURE 6. Exercice 3 question 5