Analyse Numérique - TP 2

L2 MATHÉMATIQUES, 2016-2017

L'objet de ce TP est d'utiliser les interpolations polynômiales pour résoudre le problème :

Étant donné $n+1$ points $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$, trouver une fonction $f : x \mapsto f(x)$ telle que $f(x_i) = y_i$ pour tout i.

Dans le répertoire TP-AN-2016 de votre espace de travail, enregistrez le fichier tp2-1617.py depuis le site

`http://champion.univ-tln.fr/`

en suivant les liens `Enseignement` puis `Analyse Numérique de semestre 3`.
Vous transmettrez votre rapport par courriel à l'adresse champion@univ-tln.fr sous la forme : tp2-VOTRENOM.pdf.

Exercice 1.

(1) Rappeler les définitions des polynômes d'interpolation de Lagrange et Hermite.
(2) Lire et comprendre les deux fonctions du fichier tp2-1617.py.

Exercice 2. En utilisant les fonctions données dans le programme :

(1) Programmer une fonction qui calcule la valeur du polynôme de Lagrange P qui interpole les points $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$ et $(3, 3)$.
Évaluer le polynôme P aux points : -2,-1,0,1,2,3,4,5.
(2) Programmer une fonction qui calcule la valeur du polynôme de Hermite Q qui interpole les points $(-1, 0, 1)$ et $(2, 0, -1)$.
Évaluer le polynôme Q aux points : -2,-1,0,1,2,3,4,5.
(3) Afficher sur le même graphique les courbes des deux polynômes ainsi obtenus sur l'intervalle $[-2, 4]$.

Exercice 3. Soit f la fonction de Runge $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

(1) Programmer une fonction qui calcule la valeur du polynôme P_n d'interpolation de Lagrange de f avec n noeuds (points d'interpolation) équirépartis sur l'intervalle $[a, b] = [-5, 5]$, pour $n = 3$, 4, 5 et 8.
Rappel. Les points $x_0, \ldots, x_k$ sont équirépartis dans l'intervalle $[a, b]$ si $x_0 = a$, $x_{i+1} = x_i + \delta$ pour tout $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ et $x_k = b$, avec δ bien choisi.
(2) Dessiner dans un même plan les graphes de f et de P_n sur l'intervalle $[-5, 5]$.
(3) Faire de même avec les polynômes H_n d'interpolation de Hermite.
(4) Comparer ces deux résultats : pour cela, on tracera les graphes de f, P_n et H_n dans un même plan. On calculera aussi les écarts maximaux observés pour chaque méthode :

$$\|f - P\| = \max \{|f(x) - P(x)| : x \in X_{50}\}$$

où $X_{50} = \left\{-5 + \frac{k}{5} : 0 \leq k \leq 50\right\}$.
(5) Répéter les questions précédentes en remplaçant les noeuds équirépartis par les noeuds de Chebychev définis par $x_i = \dfrac{1}{2}\left(a + b + (b-a)\cos\left(\dfrac{2i+1}{n+1}\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ pour $i \in \{0, \ldots, n\}$.