Analyse Numérique - TP 2 - corrigé

Exercice 2. En utilisant les fonctions données dans le programme :

(1) Programmer une fonction qui calcule la valeur du polynôme de Lagrange P qui interpole les points $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$ et $(3, 3)$.
Évaluer le polynôme P aux points : -2,-1,0,1,2,3,4,5.

(2) Programmer une fonction qui calcule la valeur du polynôme de Hermite Q qui interpole les points $(-1, 0, 1)$ et $(2, 0, -1)$.
Évaluer le polynôme Q aux points : -2,-1,0,1,2,3,4,5.

(3) Afficher sur le même graphique les courbes des deux polynômes ainsi obtenus sur l'intervalle $[-2, 4]$.

Corrigé de l'exercice 2. Pour les codes Python, se reporter au fichier `tp2-1617-correc.py`.
On obtient les courbes de la figure 1.

Exercice 3. Soit f la fonction de Runge $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

(1) Programmer une fonction qui calcule la valeur du polynôme P_n d'interpolation de Lagrange de f avec n noeuds (points d'interpolation) équirépartis sur l'intervalle $[a, b] = [-5, 5]$, pour $n = 3$, 4, 5 et 8.
Rappel. Les points $x_0, \ldots, x_k$ sont équirépartis dans l'intervalle $[a, b]$ si $x_0 = a$, $x_{i+1} = x_i + \delta$ pour tout $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ et $x_k = b$, avec δ bien choisi.

(2) Dessiner dans un même plan les graphes de f et de P_n sur l'intervalle $[-5, 5]$.

(3) Faire de même avec les polynômes H_n d'interpolation de Hermite.

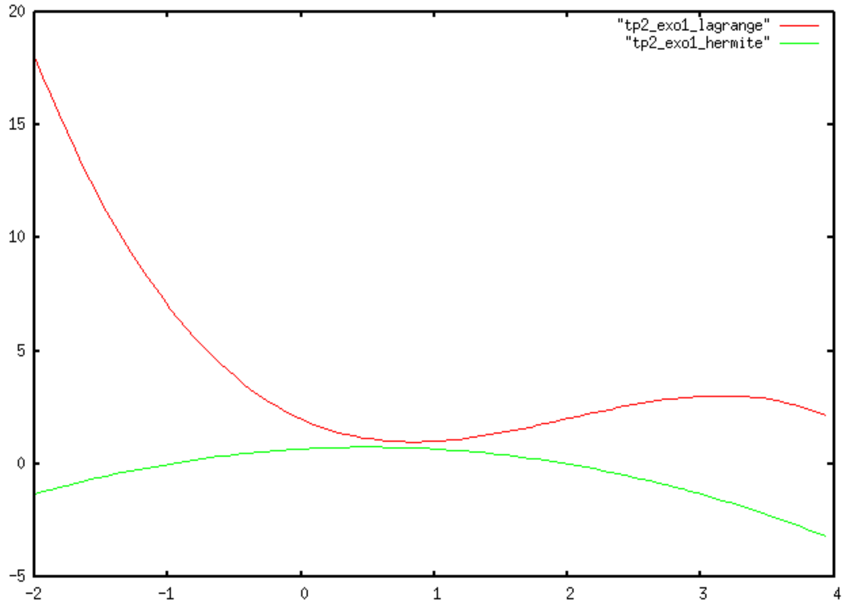

FIGURE 1. Exercice 2

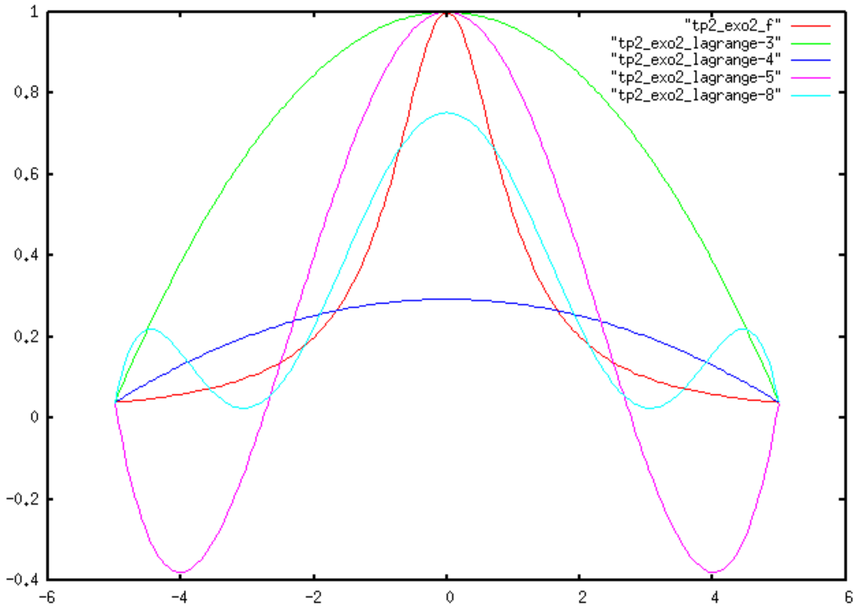

FIGURE 2. Exercice 2 question 2

(4) Comparer ces deux résultats : pour cela, on tracera les graphes de f, P_n et H_n dans un même plan. On calculera aussi les écarts maximaux observés pour chaque méthode :

$$\|f - P\| = \max\{|f(x) - P(x)| : x \in X_{50}\}$$

où $X_{50} = \left\{-5 + \frac{k}{5} : 0 \leq k \leq 50\right\}$.

(5) Répéter les questions précédentes en remplaçant les noeuds équirépartis par les noeuds de Chebychev définis par $x_i = \dfrac{1}{2}\left(a + b + (b-a)\cos\left(\dfrac{n-i}{n}\pi\right)\right)$ pour $i \in \{0, \dots, n\}$.

Corrigé de l'exercice 3. Pour les codes Python, se reporter au fichier `tp2-1617-correc.py`.

Pour la question 2 on obtient les courbes de la figure 2, sur laquelle on observe que le polynôme d'interpolation passe bien par les points imposés.

Pour la question 3 on obtient les courbes de la figure 3, sur laquelle on observe que le polynôme d'interpolation passe bien par les points imposés avec les bonnes dérivées.

Pour la question 4 on obtient les courbes de la figure 4. Pour ce qui concerne les écarts maximaux, on voit que ceux-ci ne diminuent pas quand n augmente, et ont même tendance à "exploser" pour $n = 50$, ce qui confirme bien le résultat annoncé en cours pour cette fonction.

Pour la question 5, on obtient les figures 5 (pour les polynômes d'interpolation de Lagrange) et 6 (pour ceux de Hermite), et on voit que les écarts tendent vers 0 quand n grandit, ce qui confirme le résultat théorique.

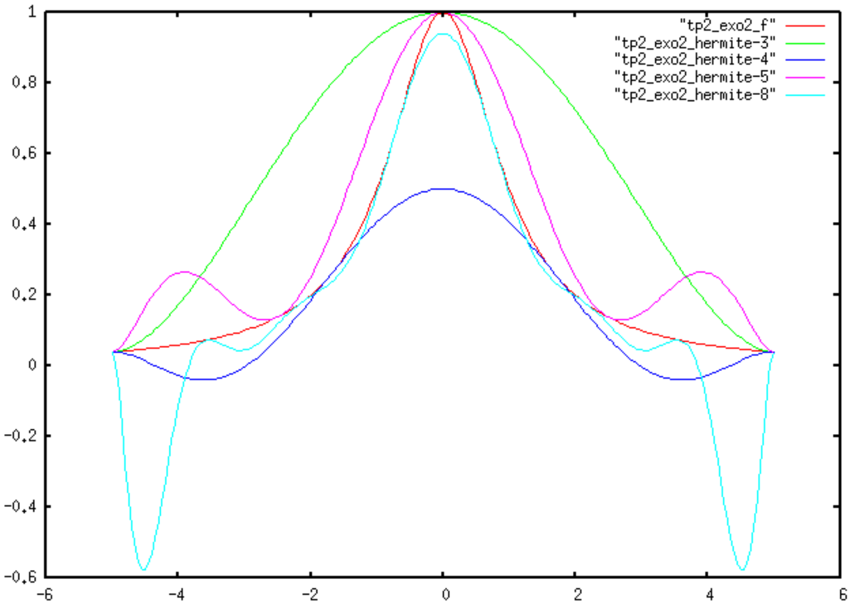

FIGURE 3. Exercice 2 question 3

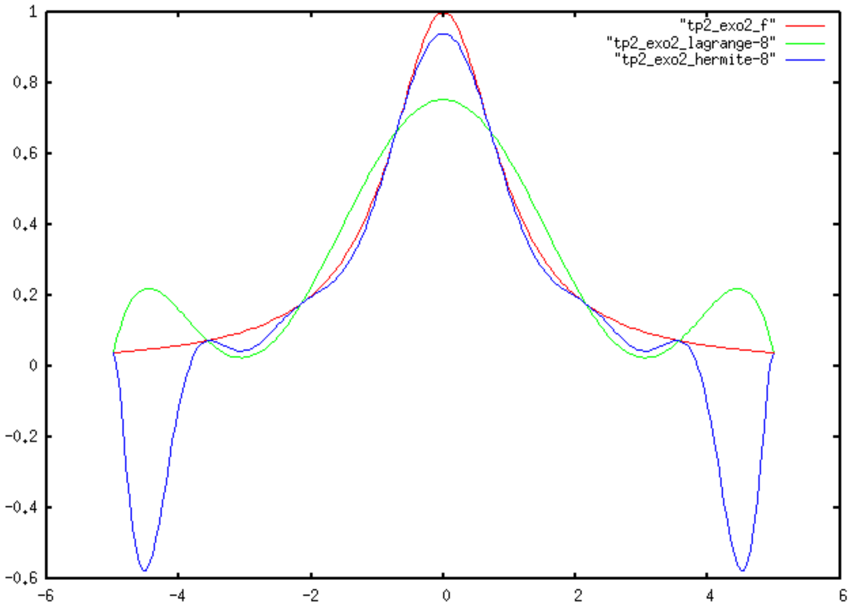

FIGURE 4. Exercice 2 question 4

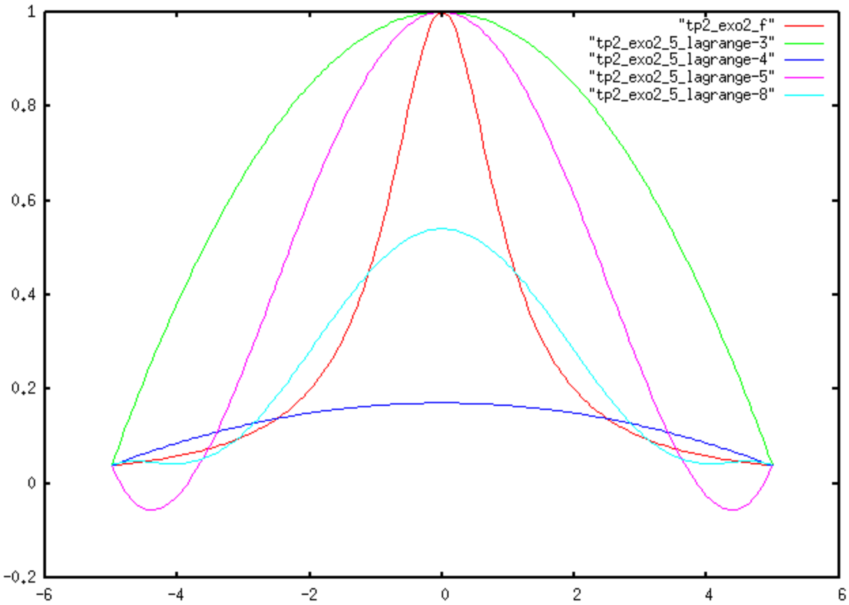

Figure 5. Exercice 2 question 5

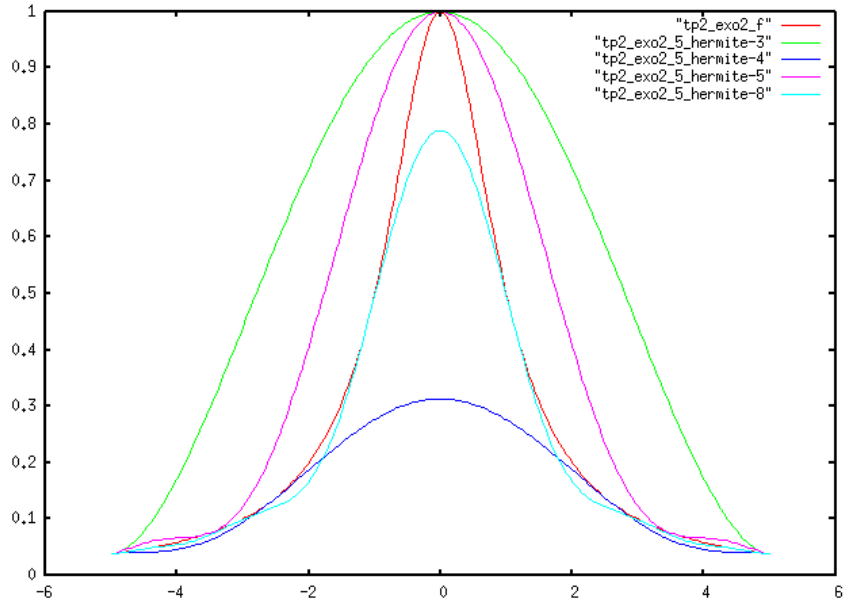

Figure 6. Exercice 2 question 5