

Analyse Numérique - TP 1
L2 MATHÉMATIQUES, 2016-2017

L'objet de ce TP est l'approximation numérique des racines d'une fonction réelle à variable réelle :
étant donné $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, trouver $c \in I$ tel que $f(c) = 0$.

Créez un répertoire nommé TP-AN-2016 dans votre espace de travail. Tous vos résultats doivent être enregistrés dans ce dossier. Téléchargez le fichier `tp1-1617.py` depuis le site

<http://champion.univ-tln.fr/>

en suivant les liens Enseignement puis Analyse Numérique de semestre 3, et enregistrez ce fichier dans le dossier TP-AN-2016.

Vous transmettez votre rapport par courriel à l'adresse `champion@univ-tln.fr` sous la forme : `tp1-VOTRENOM.pdf`.

Exercice 1. Lire et comprendre les deux fonctions du fichier `tp1-1617.py`.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - x - 2$.

- (1) Pour cette fonction, cherchez une approximation du zéro $c = 2$ dans l'intervalle $[0; 3, 5]$ par la méthode de dichotomie en utilisant le programme du fichier `tp1-1617.py`.
- (2) Appliquez la méthode de Newton en partant de la valeur initiale $x = 1$.
- (3) Programmez la méthode de Lagrange dans le fichier `tp1-1617.py`.
- (4) Comparez le nombre d'itérations nécessaires pour ces méthodes pour obtenir c avec la précision $\varepsilon = 10^{-3}$, $\varepsilon = 10^{-6}$, puis $\varepsilon = 10^{-9}$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos^2(2x) - x^2$.

- (1) Cherchez une approximation du zéro $c \simeq 0,5149332646611294$ par les méthodes suivantes :
 - la méthode de la dichotomie sur $[0; 1, 5]$;
 - la méthode de Lagrange sur $[0; 1, 5]$;
 - la méthode de Newton, en partant de la valeur initiale $x = 0, 8$.
- (2) Comparez le nombre d'itérations nécessaires pour ces méthodes pour obtenir c avec la précision $\varepsilon = 10^{-6}$.
- (3) Pour chaque méthode, tracez une courbe qui permet d'afficher l'erreur $\varepsilon_k := |x_k - c|$ entre le point x_k calculé à l'itération k et la solution c en fonction du nombre k d'itérations. Prenez soin d'utiliser une échelle logarithmique pour l'axe des ordonnées.
- (4) Donnez une conclusion sur le comportement de l'erreur pour ces différentes méthodes.

Exercice 4. On s'intéresse dans cet exercice au calcul de l'ordre de convergence des trois méthodes ci-dessus pour le calcul du zéro de la fonction $f : x \mapsto 1, 6 + \cos(x) - x$. Pour chacune de ces trois méthodes :

- (1) Donnez les résultats obtenus après quelques itérations, en fixant diverses conditions initiales.
- (2) Donnez la valeur du zéro c de cette fonction avec une précision de 10^{-10} .
- (3) Évaluez l'ordre de convergence de chacune de ces méthodes en traçant la courbe du rapport $\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k^\alpha}$ entre deux erreurs consécutives en fonction du nombre d'itérations k (ici aussi on pourra utiliser une échelle logarithmique), en choisissant le paramètre α selon la méthode.

Exercice 5. On considère la fonction polynomiale $f(x) = 7x^3 - 4x^2 - 30x + 6$, dont on sait que tous les zéros sont dans l'intervalle $[-10, 10]$.

- (1) méthode de la dichotomie :
 - (a) Écrire un programme générique pour la résolution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[a, b]$ qui consiste à découper cet intervalle en m intervalles et en cherchant un zéro dans chacun de ces intervalles par la méthode de la dichotomie.
 - (b) Appliquer votre programme pour l'intervalle $[a, b] = [-10, 10]$ et $m = 1$, puis $m = 2$, puis $m = 10$, jusqu'à trouver toutes les racines de f .
- (2) méthode de Newton :
 - (a) Écrire un programme générique pour la résolution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[a, b]$ qui consiste à prendre m points initiaux équirépartis dans $[a, b]$ et à appliquer la méthode de Newton pour chacun de ces points.
 - (b) Appliquer votre programme pour l'intervalle $[a, b] = [-10, 10]$ et $m = 1$, puis $m = 2$, $m = 10$, jusqu'à retrouver toutes les racines de f .