Analyse Numérique - TP 1 - corrigé

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto x^2 - x - 2$.

1. Pour cette fonction, cherchez une approximation du zéro $c = 2$ dans l'intervalle $[0; 3, 5]$ par la méthode de dichotomie en utilisant le programme du fichier `tp1-1617.py`.
2. Appliquez la méthode de Newton en partant de la valeur initiale $x = 1$.
3. Programmez la méthode de Lagrange dans le fichier `tp1-1617.py`.
4. Comparez le nombre d'itérations nécessaires pour ces méthodes pour obtenir c avec la précision $\varepsilon = 10^{-3}$, $\varepsilon = 10^{-6}$, puis $\varepsilon = 10^{-9}$.

Corrigé de l'exercice 2. Pour les codes Python, se reporter au fichier `tp1-1617-correc.py`.

Pour la question 4 on remarque que la méthode qui demande le moins d'itérations pour une précision fixée est celle de Newton, et celle qui en demande le plus est la dichotomie.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \cos^2(2x) - x^2$.

1. Cherchez une approximation du zéro $c \simeq 0,5149332646611294$ par les méthodes suivantes :
   — la méthode de la dichotomie sur $[0; 1, 5]$;
   — la méthode de Lagrange sur $[0; 1, 5]$;
   — la méthode de Newton, en partant de la valeur initiale $x = 0, 8$.
2. Comparez le nombre d'itérations nécessaires pour ces méthodes pour obtenir c avec la précision $\varepsilon = 10^{-6}$.
3. Pour chaque méthode, tracez une courbe qui permet d'afficher l'erreur $\varepsilon_k := |x_k - c|$ entre le point x_k calculé à l'itération k et la solution c en fonction du nombre k d'itérations. Prenez soin d'utiliser une échelle logarithmique pour l'axe des ordonnées.
4. Donnez une conclusion sur le comportement de l'erreur pour ces différentes méthodes.

Corrigé de l'exercice 3. Pour les codes Python, se reporter au fichier `tp1-1617-correc.py`.

On peut remarquer que cette fois la méthode de Lagrange semble fonctionner mieux que celle de Newton (parceque l'intervalle de départ est bien adapté et le point de départ pour Newton "trop loin" de c).

Pour la question 3 on obtient les tracés de la figure 1.

On remarque sur ces tracés en échelle semi-logarithmique que l'erreur pour la dichotomie est plus ou moins affine (c'est ce qu'on attend), alors que les courbes pour Lagrange et Newton ressemblent plus à des fonctions "puissance".

Exercice 4. On s'intéresse dans cet exercice au calcul de l'ordre de convergence des trois méthodes ci-dessus pour le calcul du zéro de la fonction $f : x \mapsto 1, 6 + cos(x) - x$. Pour chacune de ces trois méthodes :

1. Donnez les résultats obtenus après quelques itérations, en fixant diverses conditions initiales.
2. Donnez la valeur du zéro c de cette fonction avec une précision de 10^{-10}.
3. Évaluez l'ordre de convergence de chacune de ces méthodes en traçant la courbe du rapport $\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k^\alpha}$ entre deux erreurs consécutives en fonction du nombre d'itérations k (ici aussi on pourra utiliser une échelle logarithmique), en choisissant le paramètre α selon la méthode.

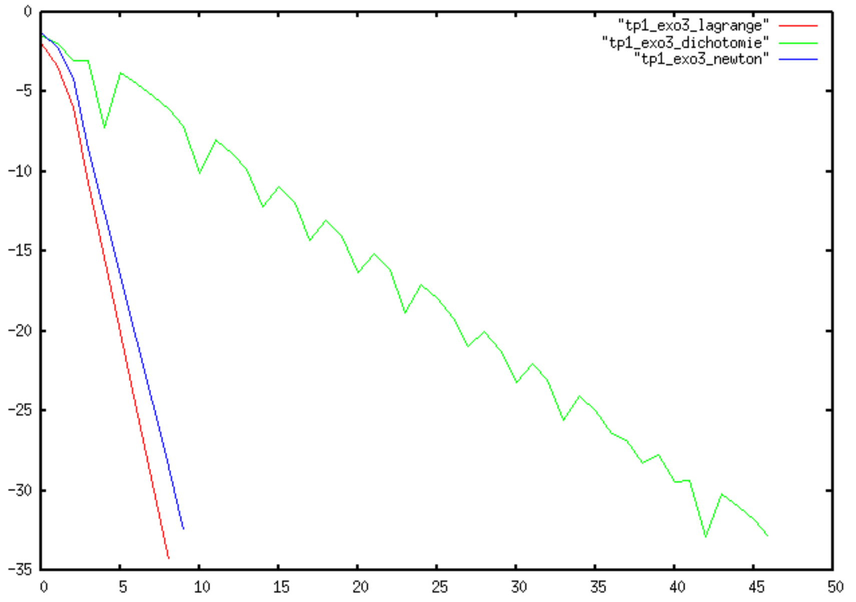

FIGURE 1 – Exercice 3

Corrigé de l'exercice 4. On va plutôt traiter cet exercice avec la fonction $f : x \mapsto (x-3)^3 - (e-3)^3$, pour laquelle la méthode de Newton converge moins vite (et donc on peut mieux illustrer les résultats).

Pour les codes Python, se reporter au fichier `tp1-1617-correc.py`.

Pour la question 3 on obtient les tracés des figures 2, 3 et 4. Sur ces figures sont représentés les graphes des fonctions

$$k \mapsto \ln\left(\frac{|x_{k+1}-c|}{|x_k-c|^\alpha}\right) = \ln(|x_{k+1}-c|) - \alpha\ln(|x_k-c|)$$

où c est le zéro qu'on cherche à calculer et x_k est l'approximation obtenue à l'étape k pour la méthode considérée.

Sur la figure 2, qui concerne la dichotomie, on voit que pour $\alpha = 1$ la suite $\left(\frac{|x_{k+1}-c|}{|x_k-c|^\alpha}\right)_k$ semble converger, alors que pour $\alpha = 1,5$ ou $\alpha = 2$ elle semble tendre vers $+\infty$: cela correspond bien à la théorie, qui dit que cette méthode est linéaire (d'ordre 1), et que pour $\alpha = 1$ cette suite devrait converger vers $\frac{1}{2}$ (et sur la figure on voit que la limite du logarithme de cette suite est de l'ordre de $\ln(\frac{1}{2}) \simeq -0,7$).

Sur la figure 3, qui concerne la méthode de Lagrange, on voit que pour $\alpha = 1$ la suite $\left(\frac{|x_{k+1}-c|}{|x_k-c|^\alpha}\right)_k$ semble converger, alors que pour $\alpha = 1,5$ ou $\alpha = 2$ elle semble tendre vers $+\infty$: cela correspond bien à la théorie, qui aussi dit que cette méthode est d'ordre 1.

Sur la figure 4, qui concerne la méthode de Newton, on voit que pour $\alpha = 1$ et $\alpha = 1,5$ la suite $\left(\frac{|x_{k+1}-c|}{|x_k-c|^\alpha}\right)_k$ tend vers 0 (son logarithme semble tendre vers $-\infty$), alors que pour $\alpha = 2$ elle semble tendre vers une limite finie : cela correspond bien à la théorie, qui dit que cette méthode est d'ordre 2.

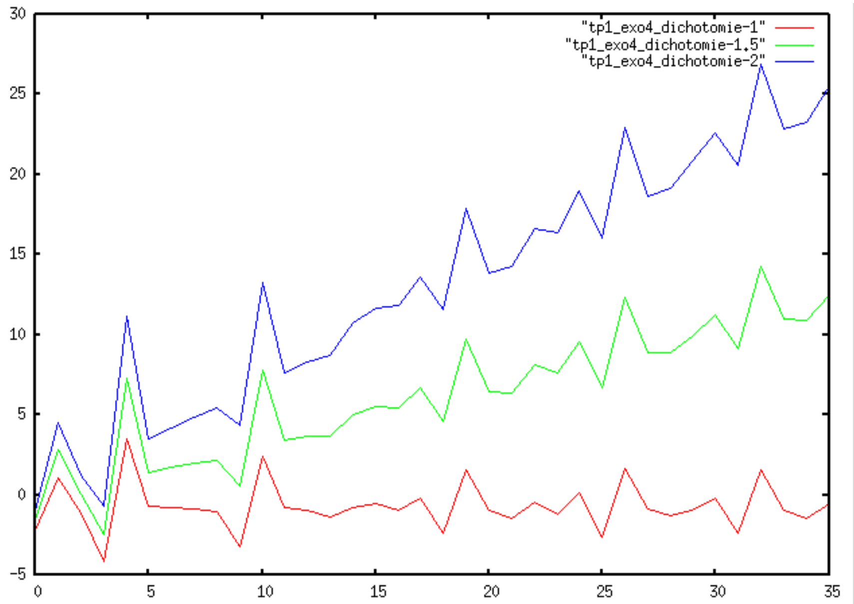

FIGURE 2 – Exercice 4 - Dichotomie

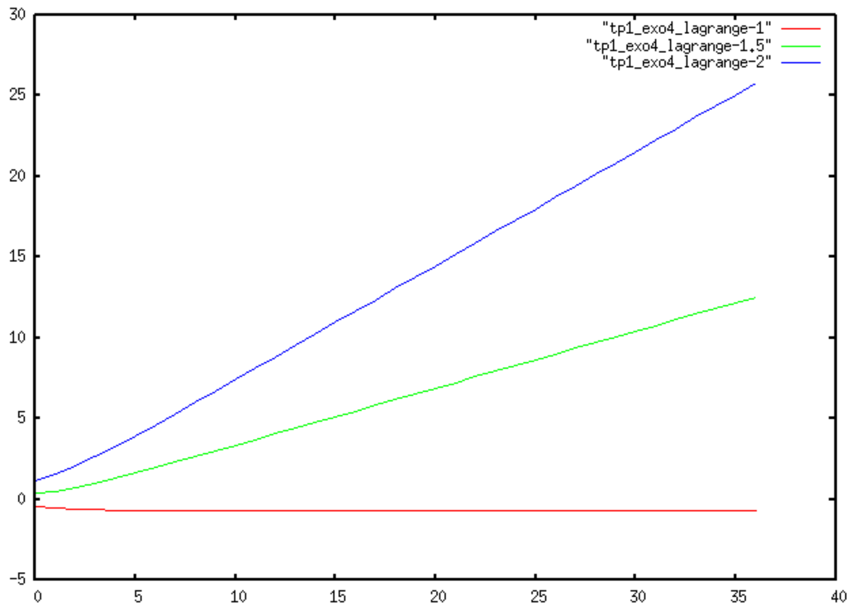

FIGURE 3 – Exercice 4 - Lagrange

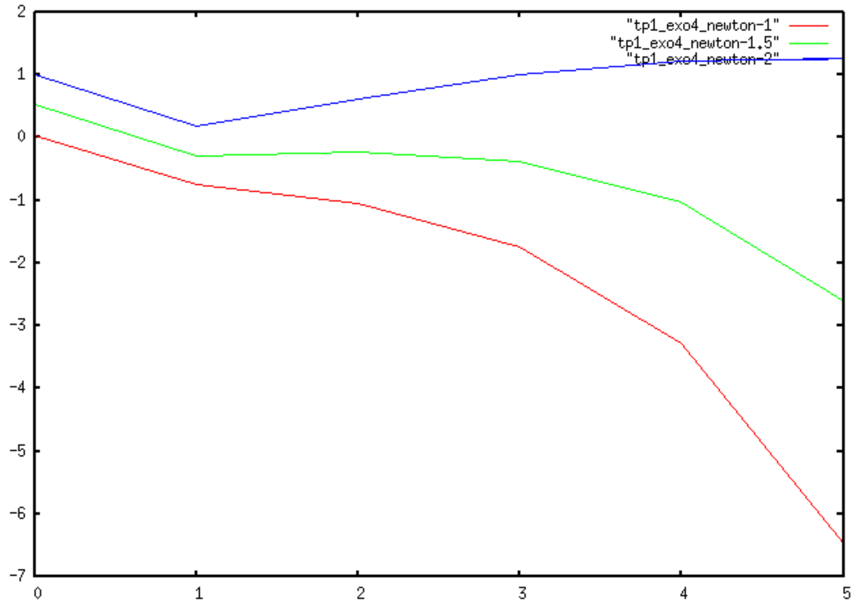

FIGURE 4 – Exercice 4 - Newton