Analyse Numérique - TP 1

L2 MATHÉMATIQUES, 2015-2016

L'objet de ce TP est l'approximation numérique des racines d'une fonction réelle à variable réelle : étant donné $f : I \to \mathbb{R}$, trouver $c \in I$ tel que $f(c) = 0$.

Créez un répertoire nommé TP-AN-2015 dans votre espace de travail. Tous vos résultats doivent être enregistrés dans ce dossier. Téléchargez le fichier tp1-1516.py depuis le site

`http://champion.univ-tln.fr/`

en suivant les liens `Enseignement` puis `Analyse Numérique de semestre 3`, et enregistrez ce fichier dans le dossier TP-AN-2015.
Vous transmettrez votre rapport par courriel à l'adresse champion@univ-tln.fr sous la forme : tp1-VOTRENOM.pdf.

Exercice 1. Lire et comprendre les deux fonctions du fichier tp1-1516.py.

Exercice 2. Soit $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - x - 2$.

(1) Pour cette fonction, cherchez une approximation du zéro $c = 2$ dans l'intervalle $[0; 3,5]$ par la méthode de dichotomie en utilisant le programme du fichier tp1-1516.py.
(2) Appliquez la méthode de Newton en partant de la valeur initiale $x = 1$.
(3) Programmez la méthode de Lagrange (aussi appelée méthode de la sécante) dans le fichier tp1-1516.py.
(4) Comparez le nombre d'itérations nécessaires pour ces méthodes pour obtenir c avec la précision $\varepsilon = 10^{-6}$, puis $\varepsilon = 10^{-9}$.

Exercice 3. Soit $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos^2(2x) - x^2$.

(1) Cherchez une approximation du zéro $c \simeq 0,5149332646611294$ par les méthodes suivantes :
   - la méthode de la dichotomie sur $[0; 1,5]$;
   - la méthode de Lagrange sur $[0; 1,5]$;
   - la méthode de Newton, en partant de la valeur initiale $x = 0,8$.
(2) Comparez le nombre d'itérations nécessaires pour ces méthodes pour obtenir c avec la précision $\varepsilon = 10^{-6}$.
(3) Pour chaque méthode, tracez une courbe qui permet d'afficher l'erreur $\varepsilon_k := |x_k - c|$ entre le point x_k calculé à l'itération k et la solution c en fonction du nombre k d'itérations. Prenez soin d'utiliser une échelle logarithmique pour l'axe des ordonnées.
(4) Donnez une conclusion sur le comportement de l'erreur pour ces différentes méthodes.

Exercice 4. On s'intéresse dans cet exercice au calcul de l'ordre de convergence des trois méthodes ci-dessus pour le calcul du zéro de la fonction $f : x \mapsto 1,6 + cos(x) - x$. Pour chacune de ces trois méthodes :

(1) Donnez les résultats obtenus après quelques itérations, en fixant diverses conditions initiales.
(2) Donnez la valeur du zéro c de cette fonction avec une précision de 10^{-10}.
(3) Calculez l'ordre de convergence en évaluant le rapport $\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k}$ entre deux erreurs consécutives en fonction du nombre d'itérations k : ici aussi on pourra utiliser une échelle logarithmique pour représenter l'évolution de ce rapport en fonction de k.

Exercice 5. On considère la fonction polynomiale $f(x) = 7x^3 - 4x^2 - 30x + 6$, dont on sait que tous le zéros sont dans l'intervalle $[-10, 10]$.

(1) Écrire un programme générique pour la résolution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[a, b]$ qui consiste à découper cet intervalle en m intervalles et en cherchant un zéro dans chacun de ces intervalles par la méthode de la dichotomie.
(2) Appliquer votre programme pour l'intervalle $[a, b] = [-10, 10]$ et $m = 1$, puis $m = 2$, puis $m = 10$, jusqu'à trouver toutes les racines de f.
(3) Écrire un programme générique pour la résolution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[a, b]$ qui consiste à prendre m points initiaux équirépartis dans $[a, b]$ et à appliquer la méthode de Newton pour chacun de ces points.
(4) Appliquer votre programme pour l'intervalle $[a, b] = [-10, 10]$ et $m = 1$, puis $m = 2$, $m = 10$, jusqu'à retrouver toutes les racines de f.