Master Mathématiques – M1 – Optimisation numérique
Thierry Champion

TP du 30 mars 2018
Un problème de calcul des variations : la courbe brachistochrone

Préambule.

On cherche à fabriquer un toboggan partant du point $A = (x_A, y_A)$ et arrivant au point $B = (x_B, y_B)$ de telle sorte que le temps mis par une bille qui part sans vitesse du point A arrive le plus vite possible au point B, en supposant que cette bille n'est soumise qu'à la gravitation (et à la réaction du toboggan), sans frottement.

Si la forme du toboggan est donnée par le graphe $y = f(x)$ de la fonction f, le temps mis par la boule pour aller de A vers B est

$$T(f) \;=\; \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{\frac{1+(f'(x))^2}{2\,g\,(y_A - f(x))}}\,dx$$

où $g = 9,8m\,s^{-2}$ est l'accélération de la pesanteur. Dans la suite on suppose $x_A = 0$ et $B = (1,0)$, on cherche donc une solution du problème

$$(P) \qquad \inf\{T(f) : \;\; f : [0,2] \to \mathbb{R},\, f(0) = y_A,\, f(2) = 0\}.$$

Afin de résoudre ce problème de manière approchée, on le discrétise par la méthode des éléments finis. Pour $N \geq 1$ fixé, on considère l'ensemble $\mathcal{A}_N$ des fonctions affines par morceaux $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telles que $f(0) = y_A$, $f(1) = 0$ et

$$\forall n \in \{0, \ldots, N\}, \qquad f \text{ affine sur } \left[\frac{n}{N+1}, \frac{n+1}{N+1}\right].$$

Toute fonction $f \in \mathcal{A}_N$ est alors caractérisée par le vecteur $y \in \mathbb{R}^{N+2}$ donné par

$$\forall n \in \{0, \ldots, N+1\}, \qquad y_n = f\left(\frac{n}{N+1}\right).$$

L'ensemble des vecteurs ainsi obtenus est alors

$$\mathcal{B}_N = \{y \in \mathbb{R}^{N+2} \,:\, y_0 = y_A,\, y_{N+1} = 0\}.$$

1. Réécrire le problème

$$(P_N) \qquad \inf\{T(f) \,:\, f \in \mathcal{A}_N\}$$

sous la forme

$$(P_N) \qquad \inf\{T_N(y) \,:\, y \in \mathcal{B}_N\}$$

en explicitant la fonction T_N comme fonction du vecteur y. Pour cela, on remarquera que si $f \in \mathcal{A}_N$ alors

$$T(f) \;=\; \sum_{n=0}^{N} \int_{\frac{n}{N+1}}^{\frac{n+1}{N+1}} \sqrt{\frac{1+(f'(x))^2}{2\,g\,(y_A - f(x))}}\,dx,$$

où chaque terme $\displaystyle\int_{\frac{n}{N+1}}^{\frac{n+1}{N+1}} \sqrt{\frac{1+(f'(x))^2}{2\,g\,(y_A - f(x))}}\,dx$ ne dépend que de y_n et y_{n+1}.

2. Pour $y_A = 1$, trouver une solution numérique y^N de (P_N) via la méthode de la plus grande pente :

   a) on pourra commencer par appliquer la méthode de la plus grande pente avec un pas constant ;

   b) on applique ensuite la méthode de la plus grande pente avec recherche linéaire de Wolfe pour le calcul du pas.

   Dans tous les cas on calculera le gradient de T_N par la méthode des différences finies, et on testera différentes valeurs pour N : $N = 1$, $N = 2$, $N = 10$, $N = 20$, $N = 40$, et différentes précisions ε.
   Dans chaque cas, on s'intéressera à la vitesse de convergence (nombre d'itérations).

3. Tracer le toboggan obtenu à la question précédente. Comparer avec un toboggan rectiligne (pour lequel f est affine sur $[0, 1]$).

4. Reprendre les deux questions précédentes avec $y_A = 0,4$ et $y_A = 2$. Tester aussi des valeurs de y_A "petites" et "grandes".