M1 Mathématiques Appliquées, 2017-2018
Modélisation - Optimisation numérique
Thierry CHAMPION

TP du 16 février 2018

Préambule

On applique les différentes méthodes de la plus grande pente à un problème quadratique simple.

On veut résoudre numériquement le problème modèle suivant :

$$(P) \qquad \inf \left\{ J(x) := \frac{1}{2} \langle A.x, x \rangle - \langle b, x \rangle \ : \ x \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

où

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -3 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 7 \end{bmatrix} \qquad et \qquad b := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

1. Montrer que J est strictement convexe. Ecrire les conditions d'optimalité et calculer la solution optimale théorique de (P). *Dans la suite, on pourra prendre comme test la distance à l'unique solution optimale de* (P).

2. Programmer la méthode de la plus grande pente à pas constant.
On prendra pour point initial $x^0 = 0$ et pour précision $\varepsilon = 10^{-2}$ (pour tester) et $\varepsilon = 10^{-6}$.
On testera diverses valeurs pour le pas choisi et on comparera la vitesse de convergence (c'est-à-dire le nombre d'itérations nécessaires avant l'arrêt de l'algorithme).

3. Programmer la méthode de la plus grande pente à pas optimal pour ce problème. Pour cela, justifier que la solution du problème
$$\min \{ q(t) = J(x - t\nabla J(x)) \ : \ t > 0 \}$$
est
$$\rho_{opt} = \frac{\langle \nabla J(x), \nabla J(x) \rangle}{\langle A \nabla J(x), \nabla J(x) \rangle}.$$

4. Programmer la méthode de la plus grande pente en utilisant la recherche linéaire de Wolfe pour calculer le pas à chaque étape.
Faire plusieurs essais selon les valeurs des paramètres m_1 et m_2 de cette recherche linéaire et comparer les vitesses de convergence (nombre d'itérations pour chaque recherche linéaire, et pour l'algorithme dans son ensemble).

5. Calculer le produit scalaire du gradient de J en x avec un vecteur v.
   Comparer avec le résultat obtenu en faisant la différence finie
$$\nabla J(x) \cdot v \;\approx\; \frac{J(x + t\,v) - J(x - t\,v)}{2\,t}.$$
   En déduire une manière de calculer numériquement le gradient de J sans faire le calcul théorique.
   Reprendre les deux questions précédentes en utilisant cette formule de différences finies pour calculer le gradient.

6. Tester les méthodes précédentes pour la fonction de Rosenbrock. On testera divers points initiaux, dont $(-2,-2)$, $(-2,2)$, $(0,2)$ et $(2,2)$.

7. Retour au problème (P). Programmer la *méthode de l'algorithme proximal* : il consiste, à l'étape n, lorsqu'on dispose de x^n, à résoudre de manière approchée le problème
$$\inf\left\{ J(x) + \frac{1}{2\,\delta_n}\|x - x^n\|^2 \;:\; x \in \mathbb{R}^3 \right\}$$
   et à choisir pour x^{n+1} la solution approchée trouvée.
   Pour résoudre le problème d'optimisation apparaissant à chaque itération on choisira une méthode parmi les méthodes vues précédemment.