Exercices de probabilité

1 Probabilité

Exercice 1.1
On lance mille fois une pièce de monnaie. Les 999 premiers lancers donnent tous "pile". Quelle est la probabilité que le résultat du millième lancer soit "pile" ?

Exercice 1.2
Mon voisin a deux enfants.
1- Le plus jeune est une fille, quelle est la probabilité que l'autre soit aussi une fille ?
2- L'un d'eux est une fille, quelle est la probabilité que l'autre soit aussi une fille ?

Exercice 1.3
Soient A, B et C trois événements d'un espace probabilisé. Exprimer les événements suivants à l'aide des opérations élémentaires sur les événements :
1- A est réalisé seul.
2- A et B sont réalisés, mais pas C.
3- Exactement un des trois événements est réalisé.
4- Deux événements au plus sont réalisés.
5- Aucun de ces événements n'est réalisé.
6- Au moins deux sur les trois sont réalisés.
7- Deux événements exactement sur les trois sont réalisés.

Exercice 1.4
Soient A, B et C trois événements d'un espace probabilisé. On suppose que $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$, et que $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4}$.
Quelles sont les valeurs possibles pour $P(A \cap B \cap C)$?

Exercice 1.5
Soient A, B et C trois événements d'un espace probabilisé. On suppose que si A et B sont réalisés, alors C est réalisé. Montrer alors que $P(A) + P(B) \leq 1 + P(C)$.

Exercice 1.6
Une cible est constituée d'un disque D inscrit dans un carré C. On lance, sans viser, une fléchette. On suppose que l'on ne rate jamais la cible (c'est à dire le carré).
1- Simuler 10000 lancer de fléchettes et calculer la fréquence des tirs qui atteignent le disque.
2- Pouvait-on s'attendre à un tel résultat ? Justifier la réponse.

Exercice 1.7
L'astragale est un petit os de la cheville dont se servaient les Grecs et des Romains pour jouer en la lançant comme un dé. Elle possède 4 faces distinctes a, b, c et d ayant les probabilités respectives $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{10}$ de sortir.
Calculer la probabilité du *coup de Vénus* : avec 4 astragales sortir, en un lancer, exactement les 4 faces.

Exercice 1.8
Comparer les probabilités d'obtenir 9 et 10 en lançant
1- deux dés.
2- trois dés.

Exercice 1.9 *Un problème du Chevalier de Méré*
Deux joueurs, A et B, jouent à pile ou face: à chaque lancer, si on obtient pile A marque un point, si on obtient face B marque un point. Le premier joueur ayant 5 points gagne. On suppose que chacun des joueurs a misé 2 euros au début de la partie, et qu'après 7 lancers le joueur A mène 4 à 3. Le jeu est interrompu: comment doit-on partager les 4 euros de la mise entre les deux joueurs?

Exercice 1.10 *Un autre problème du Chevalier de Méré*
Qu'est-ce qui est le plus probable : sortir au moins un 6 en lançant 4 fois un dé ou sortir au moins un double 6 en lançant 24 fois deux dés ?

Exercice 1.11
Calculer la probabilité, au jeu du 421, de réaliser :
1- 421 en un coup.
2- 421 en au plus deux coups.
3- 421 en au plus trois coups.

Exercice 1.12
Une urne contient 4 boules blanches et 5 noires. On en tire 3 d'un coup. Quelle est la probabilité d'avoir tiré au moins une noire ?

Exercice 1.13
Une information booléenne (oui/non), supposée vraie, passe par n intermédiaires avant de me parvenir. Sachant que chaque personne intermédiaire ment avec la probabilité p, quelle est la probabilité p_n que je reçoive la bonne information ? Calculer $\lim p_n$.

Exercice 1.14 *Les anniversaires*
Dans une assemblée il y a N personnes.
1- Calculer la probabilité p_N qu'il y ait au moins deux personnes ayant la même date d'anniversaire.
2- A partir de combien de personnes est-on sûr que $p_N \geq \frac{1}{2}$?
3- Calculer p_{50} et p_{60}.
4- Calculer la probabilité q_N qu'il y ait au moins une personne ayant la même date d'anniversaire que moi.
5- A partir de combien de personnes est-on sûr que $q_N \geq \frac{1}{2}$?

Exercice 1.15
Deux dés sont lancés n fois. Quel est le plus petit entier n pour que la probabilité d'obtenir au moins un double 6 soit supérieure à 0,5 ?

Exercice 1.16
Dans une urne il y a n jetons dont deux seulement sont gagnants. Un joueur a le droit d'utiliser une des deux stratégies suivantes :
- prendre simultanément deux jetons.
- tirer un jeton, noter le résultat, le replacer dans l'urne et recommencer une fois.

1- Comparer les probabilités de succès (avoir au moins un jeton gagnant) des deux stratégies.
2- Répondre à la même question avec m jetons gagnants.

Exercice 1.17
Une loterie a lieu toutes les semaines. Chaque semaine on vend n billets dont m sont gagnants. On achète 10 billets. Vaut-il mieux les acheter tous la même semaine ou bien un seul par semaine pendant dix semaines, si on veut gagner au moins une fois ?

Exercice 1.18
Une roulette a n nombres numérotés 1,2 ...,n. Chaque nombre i a la probabilité $p_i = \frac{1}{n} + a_i$ de sortir. Montrer alors que la probabilité de sortir deux fois de suite le même nombre est minimale pour $p_i = \frac{1}{n}$; calculer le minimum. *(On pourra montrer que $a_1 + ... + a_n = 0$.)*

Exercice 1.19 *La ruine du joueur au casino*
Deux joueurs A et B ont un capital initial respectif a et b. Ils jouent à la roulette. A a une probabilité p de gagner et donc $1-p$ de perdre. Si A gagne, B lui donne 1 euro, sinon, c'est A qui donne 1 euro à B. Le capital total $N = a + b$ étant fixe, on veut calculer la probabilité Q_a que A soit ruiné alors qu'il a un capital a (et donc B sort vainqueur du duel).
1- Calculer Q_0 et Q_N.
2- Montrer que si $n \in [1, N-1]$ alors $Q_n = pQ_{n+1} + (1-p)Q_{n-1}$.
3- En déduire l'expression explicite de Q_n.
4- Donner un équivalent de Q_a lorsque $a << b$. Expliquer la ruine du joueur. (Dans cette dernière question on pourra se limiter au cas $p = \frac{1}{2}$.)

Exercice 1.20
Soient A et B deux événements disjoints. A quelle condition sont-ils indépendants ?

Exercice 1.21
On dispose de trois cartes identiques en tous points sauf pour leurs couleurs : une a deux faces noires, une a deux faces blanches, et la troisième a une face noire et une face blanche.
Les yeux bandés, on tire une des cartes, et on la pose sur la table. On regarde alors la face visible. Il faut alors parier sur la couleur de la face cachée.
Ce jeu est-il équilibré ou existe-t-il une stratégie permettant, en moyenne, de gagner plus qu'on ne perd.

Exercice 1.22
La banque répartit trois cartes, les deux as rouges et une dame, dont les faces sont cachées. On gagne si on choisit la dame, et on perd sinon. Après le choix, la banque ne dit rien, mais elle retourne, parmi les deux autres cartes, un as. Elle accorde alors le droit de reconsidérer le choix. Qu'est-il préférable de faire ?

Exercice 1.23
Dans un supermarché, il y a 150 cartons de lait dont 5 sont avariés et répartis au hasard parmi les 150. Chaque client est supposé acheter un carton seulement. Est-il préférable d'être le premier, le deuxième, ou le 150-ième client si on veut éviter le lait avarié ?

Exercice 1.24
On dispose de deux pièces de monnaie. On note p_1 et p_2 les probabilités d'obtenir "pile" respectivement pour la première et la seconde pièce.
On jette un dé équilibré. Si on obtient 1, on lance deux fois de suite la première pièce, et sinon, on lance deux fois de suite la seconde pièce.
1- Quelle est la probabilité d'obtenir "pile" au premier lancer ?
2- Quelle est la probabilité d'obtenir "pile" au second lancer ?
3- A quelle condition ces événements sont-ils indépendants ?
4- Que se passe-t-il si le dé n'est plus équilibré ?

Exercice 1.25
Une personne doit ouvrir une porte avec un trousseau de n clés dont une seule convient. Elle

les essaye les unes après les autres. On cherche la probabilité p_k que la porte s'ouvre au bout du $k$eme essai. Soit A_i l'événement "la $i$eme clé essayée ne convient pas".
1- Exprimer p_k à l'aide des événements A_i.
2- On suppose dans cette question que la personne oublie, après chaque essai, les clés essayées. Calculer p_1, p_2 puis p_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.
3- On suppose dans cette question que la personne, plus méthodique, écarte au fur et à mesure les clés qui ne conviennent pas.
Calculer p_1, p_2 puis p_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 1.26
On lance une pièce de monnaie. Si on obtient "pile", on s'arrête, sinon, on lance un dé. Si on obtient un nombre pair, on s'arrête, si on obtient 1, on relance la pièce, sinon, on relance le dé.
1- Calculer les probabilités de s'arrêter au bout de un, deux, trois, quatre lancers.
2- Calculer la probabilité de s'arrêter en cinq lancers ou moins.
3- Montrer que l'événement "on s'arrête" est quasi-certain.

Exercice 1.27
On prend deux nombres au hasard et de manière indépendante dans $[0, 1]$. On sait que le plus petit des deux est supérieur à α.
Quelle est la probabilité que le second soit supérieur à β ? (On a bien sûr $0 < \alpha < \beta < 1$.)

Exercice 1.28 *Marche aléatoire*
$ABCD$ est un carré de centre O. On ne peut se déplacer que sur les cotés et les diagonales, sans jamais sauter un point. On dit qu'on fait un pas lorsqu'on passe d'un point à un autre. Par exemple, de A on ne peut aller en un pas qu'en B, O ou D. Les pas possibles à partir d'un point sont équiprobables et ne dépendent pas de la distance à parcourir. On part de O. Soit p_n la probabilité d'être en O en n pas.
1- Calculer p_1, p_2, p_3 et p_4.
2- Trouver une relation de récurrence liant p_{n+1} à p_n.
3- En déduire une expression explicite de p_n.
4- Calculer $\lim p_n$.

Exercice 1.29
Une personne choisie au hasard parmi la population de la région passe un test pour dépister une maladie. Dans cette région, on a établi que :
- si une personne a la maladie, alors le test est positif dans 96% des cas,
- si une personne n'a pas la maladie, alors le test est négatif dans 94% des cas.

Le résultat du test est positif, quelle est la probabilité que cette personne soit atteinte de la maladie ? On traitera deux cas: d'abord le cas où la proportion de malades dans la population est égale à 5%, puis le cas où il est égal à 60%.

Exercice 1.30
Un appareil fabriqué en très grande série peut-être défectueux à cause de deux défauts seulement désignés par A et B.
Dans un lot de 10000 appareils, on a relevé :
- 1000 appareils présentant le défaut A,
- 800 appareils présentant le défaut B,
- 400 appareils présentant les deux défauts A et B.

Un client achète un de ces appareils.
1- Quelle est la probabilité qu'il présente le défaut A seulement ?
2- Quelle est la probabilité qu'il ne présente aucun défaut ?
3- Les événements "présente le défaut A" et "présente le défaut B" sont-ils indépendants ?
4- L'appareil acheté présente un défaut, quelle est la probabilité qu'il présente le défaut A ?

Exercice 1.31
Sur une machine on considère que les probabilités de dérèglement électronique ou mécanique pour un jour donné sont respectivement 0,003 et 0,007. On suppose qu'il n'y a pas d'autre possibilité de dérèglement, et on sait que la probabilité de dérèglement mécanique sachant qu'il y a un dérèglement électronique est 0,5.
1- Calculer la probabilité que cette machine ait les deux dérèglements un jour donné.
2- Calculer la probabilité que cette machine n'ait aucun dérèglement un jour donné.
3- Aujourd'hui la machine est déréglée, quelle est la probabilité que les causes de ce dérèglement soient à la fois électronique et mécanique ?

Exercice 1.32
Statistiquement, 2% des sportifs pris au hasard sont positifs pour la substance interdite S au contôle antidopage. De plus, on sait que 25% des sportifs utilisent cette substance S. On sait que si un sportif utilise la substance S, il a 5% de chances d'être positif au contrôle. Calculer les probabilités correspondant aux situations suivantes:
1- le sportif utilise la substance S et est controlé positif.
2- le sportif utilise la substance S sachant qu'il est positif.
3- le contrôle est positif sachant que le sportif n'utilise pas la substance S.

2 Variables aléatoires discrètes

Exercice 2.1
Démontrer la formule de Poincaré (dite aussi formule du crible) : étant donnés n événements A_1, A_2, ... A_n d'un espace probabilisé, on a

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) &= \sum_i P(A_i) - \sum_{i_1<i_2} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{i_1<i_2<i_3} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) + ... \\ &\quad +(-1)^n \sum_{i_1<...<i_{n-1}} P(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_{n-1}}) + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{\{i_1,...,i_k\} \subset [1,n] \\ \mathrm{Card}(\{i_1,...,i_k\}) = k}} P(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}). \end{aligned}$$

Exercice 2.2
Dans une urne il y a 2 boules numérotées "1" qui font gagner 1 euro et 3 boules numérotées "-1" qui font perdre 1 euro. Le joueur qui tire les boules une à une, a le droit de s'arrêter à tout moment. Montrer qu'il existe une stratégie gagnante pour le joueur.

Exercice 2.3
On tire au hasard un nombre X dans $\{1,...,n\}$ puis un nombre au hasard Y dans $\{1,...,X\}$. Donner la loi de Y.

Exercice 2.4 *La loi géométrique*
Dans une urne, il y a une proportion p de boules noires et $q = 1 - p$ de boules blanches. On tire une boule, si elle est noire on arrête, sinon, on la remet dans l'urne et on recommence. Soit X la v.a. donnant le nombre de tirage nécessaire pour s'arrêter.
Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 2.5
Soit X et Y deux v.a. indépendantes de même loi géométrique de paramètre p.
1- Déterminer la loi de la v.a. $Q = \frac{X}{Y}$.
2- Calculer l'espérance de Q et montrer que $\mathbb{E}(Q) > 1$.

Exercice 2.6
Un gardien de nuit a 10 clefs, dont une seule marche pour ouvrir une porte. Il peut employer deux méthodes :
(M_1) il retire les clefs déjà essayées,
(M_2) chaque clef peut-être essayée plusieurs fois.
1- Soit X_1 et X_2 les nombres de clefs essayées, y compris la bonne, respectivement dans les méthodes M_1 et M_2. Déterminer les lois de X_1 et X_2.
2- On sait qu'un gardien sur trois utilise la méthode M_2. Une nuit, après avoir essayé 8 clefs, un gardien n'a toujours pas ouvert la porte. Calculer la probabilité pour qu'il utilise M_2.

Exercice 2.7 *Expérience sur les rats*
On place les rats devant quatre portes identiques, et ils doivent choisir la bonne. Sinon, ils reçoivent une légère décharge électrique. On fait deux hypothèses a priori.
Hypothèse 1 : le rat a une mémoire parfaite et se souvient des portes aboutissant à une décharge.
Hypothèse 2 : le rat n'a aucune mémoire et ne se souvient pas des essais précédents.
On note X et Y les variables aléatoires donnant le nombre d'essais nécessaires pour que le rat trouve la bonne porte respectivement pour l'hypothèse 1 et 2.
1- Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.
2- Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $V(Y)$. *On pourra utiliser la fonction génératrice de Y.*

Exercice 2.8
"Montrer" qu'en moyenne il faut lancer 6 fois un dé pour obtenir le nombre désiré.

Exercice 2.9
Montrer que la probabilité de faire un total de 12 avec trois dés est le coefficient de s^{12} dans le polynôme $[\frac{1}{6}(s + s^2 + s^3 + s^4 + s^5 + s^6)]^3$. Généraliser ce résultat pour un total de T avec N dés

Exercice 2.10 *Promenade aléatoire dans $\mathbb{Z}$*
Etant sur un entier $k \in \mathbb{Z}$, un pas consiste en un déplacement de une unité, à droite $(+1)$ avec une probabilité $1/2$ et à gauche (-1) avec une probabilité $1/2$. On part de zéro, et on fait n pas. Soit S_n la v.a. donnant la position au bout de n pas.
1- Montrer que S_n peut être considéré comme une somme de n v.a. indépendantes de même loi.
2- Calculer l'espérance et la variance de S_n.
3- Calculer la probabilité p_n que $S_n = 0$. Calculer $\lim p_n$.
4- On suppose n grand. On se donne un intervalle I centré en 0. Calculer la limite de $P(S_n \in I)$.
5- n étant grand, donner un intervalle I_n où on est sûr à 95% que $S_n \in I_n$.
Pour 4- et 5-, on fera les approximations adéquates.

Exercice 2.11 *Promenade aléatoire sur un tétraèdre.*
Soit $ABCD$ un tétraèdre. On lance un dé non pipé. Si le résultat est 1 ou 2, on se déplace sur l'arête $[AB]$ si on était en A ou B, et sur $[CD]$ si on était en C ou D. Si le résultat est 3 ou 4, on se déplace sur l'arête $[AC]$ si on était en A ou C, et sur $[BD]$ si on était en B ou D. Si le résultat est 5 ou 6, on se déplace sur l'arête $[AD]$ si on était en A ou D, et sur $[BC]$ si on était en B ou C.
On part de A. Soit X le nombre de lancers minimum nécessaires pour revenir en A. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 2.12 *La loi de Poisson*
Soit n un entier non nul et $\lambda > 0$ fixé. On pose $p = \lambda/n$ et on note X_n une v.a.r. de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
1) Soit k un entier fixé et $n \geq k$. Montrer que $P(X_n = k) \to \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ lorsque $n \to \infty$.
2) Vérifier que $P(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$. Cette loi est appelée loi de Poisson de paramètre λ.
3) Calculer, si existence, l'espérance et la variance d'une v.a.r. qui suit une loi de Poisson de paramètre λ.
4) Soit X et Y deux v.a.r. indépendantes de loi de Poisson respectivement de paramètre λ et μ. Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

3 Variables aléatoires réelles à densité

Exercice 3.1
1- Soit X une v.a.r. qui suit une loi uniforme sur $[0, 1]$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $Y = \alpha X + \beta$ suive une loi uniforme.
2- Même question si X suit une loi uniforme sur $[a, b]$ ($a < b$).

Exercice 3.2
Soit $X_1, ..., X_k$ k v.a.r. indépendantes de même loi uniforme sur $[0, n]$, $n \in \mathbb{N}$. 1- Déterminer la loi de $Y = \min(X_1, ..., X_k)$.
2- Déterminer la loi de $Z = \max(X_1, ..., X_k)$.
3- On suppose que $n = 1$. Etudier la fonction qui à $a \in [0, 1]$ associe $P(Y \leq a \leq Z)$.

Exercice 3.3
Soit X une v.a.r. qui suit une loi uniforme sur $[0, n]$, $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi de $Y = X - [X]$ où $[.]$ est la fonction partie entière.

Exercice 3.4
Soit X une v.a.r. qui suit une loi uniforme sur $[0, n]$, $n \in \mathbb{N}$ et $a \in]0, 1[$.
Calculer $P([X, X + a] \cap \mathbb{N} = \emptyset)$.

Exercice 3.5
Soit X une v.a.r. qui suit une loi uniforme sur $[0, 1]$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On note $D_k(X)$ la variable aléatoire qui donne la $k-$ème décimale de X.
1- Donner la loi de $D_1(X)$.
2- Donner la loi de $D_k(X)$.

Exercice 3.6
Soit X une v.a. de loi uniforme sur $[-1, \frac{3}{2}]$. Quelle est la loi de $Y = X^2$?

Exercice 3.7
Soit X une v.a. de loi uniforme sur $[0, 1[$. Quelle est la loi de $Y = \sin(\pi X)$?

Exercice 3.8
Soit X une v.a. de loi uniforme sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Quelle est la loi de $Y = \tan(X)$?

Exercice 3.9
Des résistances sont fabriquées en série. La résistance d'un élément choisi au hasard dans la fabrication est une variable aléatoire R de loi uniforme entre 9 et 11 Ohms. Quel est la loi de la conductance $C = 1/R$?

Exercice 3.10
Dans le plan affine euclidien, on se donne un triangle isocèle rectangle OAB de sommet O. Soit X une v.a. de loi uniforme sur le segment $[OB]$. Déterminer la loi de la v.a. Θ qui donne l'angle géométrique OAX.

Exercice 3.11
Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on note, respectivement, J et A les points de coordonnées $(0, 1)$ et $(1, 1)$. Soit X une v.a. de loi uniforme sur $[0, 1]$ et M le point du segment $[OA]$ d'abscisse X et N le point d'intersection entre la droite (JM) et l'axe des abscisses. Donner la loi de la v.a. Y, abscisse de N.

Exercice 3.12
Dans le plan affine euclidien, on se donne un triangle isocèle rectangle OAB de sommet A. Soit M une v.a. de loi uniforme sur le segment $[AB]$. Montrer que la loi de la v.a.r. $X : M \mapsto OM$ est à densité non bornée.

Exercice 3.13
1- Soit M un point pris au hasard sur le cercle unité. Déterminer la loi de son ordonnée Y.
2- Soit M un point pris au hasard sur la sphère unité. Déterminer la loi de sa côte Z.

Exercice 3.14
Soit X une v.a.r. et F sa fonction de répartition.
1) Déterminer la fonction de répartition G pour chacune des v.a. suivantes :

$$(1)\ aX + b \qquad (2)\ X^n \qquad (3)\ [X] \qquad (4)\ \exp(X)$$

où a et b sont des réels, n un entier relatif, et $[.]$ la fonction partie entière.
2) Dans le cas où X admet une densité f, déterminer si les v.a. précédentes admettent une densité g, et si oui, la calculer.

Exercice 3.15 *La désintégration nucléaire.*
A partir d'un instant 0, on s'intéresse à la désintégration nucléaire d'un atome, disons d'uranium 238. La v.a.r. "durée de vie" est notée T.
Pour $t > 0$, soit $G(t) := P(T > t)$ la probabilité que l'atome soit encore en vie à la date t. On pose également $F(t) := 1 - G(t)$.
On admet que si on considère un atome radioactif à un instant t, la probabilité qu'il ne soit toujours pas désintégré à la date $t' > t$ ne dépend que de la durée $t' - t$. C'est à dire, on admet que la durée T de vie d'un atome est indépendant du temps déjà écoulé, i.e. l'atome ne vieillit pas. On suppose en outre que les atomes n'interagissent pas entre eux.

1- Comment interpréter $F(t)$?
2- Montrer que pour tout $t > 0$ et $t' > 0$, on a $G(t + t') = G(t).G(t')$.
3- En déduire qu'il existe $\lambda > 0$, caractéristique du type d'atome considéré, tel que pour tout $t > 0$, F est donnée par $F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$.
4- Montrer que T est une v.a. à densité dont on donnera la densité f.
5- Calculer $\mathbb{E}(T)$ et $V(T)$.
6- Calculer la probabilité qu'un atome dépasse son espérance de vie.
7- Calculer la probabilité qu'un atome dépasse le double de son espérance de vie.
8- Calculer la demi-période τ définie par $P(T > \tau) = \frac{1}{2}$.
A l'instant 0, on a N atomes radioactifs. On s'intéresse au nombre X_N^t d'atomes désintégrés à la date $t > 0$.
9- Donner la loi de X_N^t.
10- Sachant que N est très grand et que t est négligeable par rapport à $\mathbb{E}(T)$, donner une loi de probabilité simple approchant celle de X_N^t. *On fera toutes les approximations nécessaires, et on rappelle la formule de Stirling :* $n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n \mathrm{e}^{-n}$.

Exercice 3.16 *Loi de Cauchy*
La loi de Cauchy est la loi sur $\mathbb{R}$ de densité $f(t) = \Big(\pi(1 + t^2)\Big)^{-1}$.
1- Vérifier qu'il s'agit bien d'une densité.
2- Quelle est l'espérance et la variance d'une v.a. de loi de Cauchy ?
3- Déterminer la loi de la v.a. $Y = 1/X$ où X suit une loi de Cauchy.

Exercice 3.17
Soit X une v.a. de loi de Cauchy.
1) Déterminer la loi de $Y = \ln |X|$ (calculer sa densité).
2) Montrer que pour tout entier k la v.a. Y^k admet une espérance.
3) Calculer $\mathbb{E}(Y)$.
4) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1 + x^2} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 x^{2n} (\ln x)^2 dx$.
En déduire une expression de $\mathbb{E}(Y^2)$ à l'aide d'une série.

Exercice 3.18
Soit X une v.a.r. équirépartie sur $[0, 1]$. Elle détermine deux intervalles $[0, X]$ et $[X, 1]$.
1) Quel est la probabilité que le plus grand ait une longueur supérieure à $\frac{3}{4}$?
2) Déterminer les lois de $Y = \max\{X, 1 - X\}$ et de $Z = \min\{X, 1 - X\}$.

Exercice 3.19
Soit X une v.a.r. de fonction de répartition F supposée continue sur $\mathbb{R}$. Quelle est la loi de $Y = F(X)$?
On pourra d'abord supposer que F est strictement croissante sur un intervalle.

Exercice 3.20
Soit X une v.a. de loi uniforme sur $]0, 1[$, et $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ une application continue et strictement croissante sur $]0, 1[$.
1) Déterminer la loi de $Y = f(X)$.
2) Comment choisir f pour que Y soit de loi exponentielle ?

Exercice 3.21
Soit X une v.a.r. de densité f. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que X et $-X$ aient la même loi.

Exercice 3.22
Soit X une v.a.r. Montrer qu'il existe un réel m tel que $\frac{1}{2} \leq P(X \leq m)$ et $\frac{1}{2} \leq P(X \geq m)$. A quelle condition ce nombre est-il unique ?

Exercice 3.23 *Loi de Laplace*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = k\mathrm{e}^{-|x|}$.
1) Calculer k pour que f soit une fonction de densité.
On fixe k à la valeur trouvée et on note X une v.a.r. de densité f.
2) Déterminer la fonction de répartition F de X.
3) Montrer que $Y = X^2$ est une v.a.r. à densité et déterminer sa densité.

Exercice 3.24 *La loi exponentielle : la demi-vie*
Soit T une v.a.r. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
1- Montrer que $P(T \geq \mathbb{E}(T))$ est indépendant de λ.
2- Calculer le maximum p_λ de $t \mapsto P(T \in [t, 2t])$. La valeur de t où le maximum est atteint est appelé demi-vie.
3- Calculer λ et p_λ pour un atome de Radon 220 (la demi-vie d'un atome de Radon 220 est de 56s).

Exercice 3.25
Soit A une v.a.r. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Calculer les probabilités que l'équation $x^2 - Ax + 1 = 0$, d'inconnue x, admette zéro, une ou deux racines réelles.
Même question si A suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

4 Vecteurs aléatoires

Exercice 4.1
Soit X et Y deux v.a. de Bernoulli. Montrer que $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$ si et seulement si X et Y sont indépendantes.

Exercice 4.2
Soit X un nombre choisi au hasard dans $[0, 1]$ et Y dans $[0, X]$.
1) Déterminer la densité de (X, Y).
2) En déduire les espérances et variances de X et Y.

Exercice 4.3
Soit X et Y deux v.a. de Bernoulli et p un réel tel que la loi conjointe de (X, Y) est donnée par:
$P[(X = 0) \cap (Y = 0)] = \frac{1}{6} + p$, $P[(X = 0) \cap (Y = 1)] = \frac{1}{2} - p$ et $P[(X = 1) \cap (Y = 0)] = \frac{1}{3} - p$.
1- Quelles sont les conditions que doit vérifier p ?
2- Donner $P[(X = 1) \cap (Y = 1)]$.
3- Déterminer les lois marginales.
4- X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 4.4
Soit X et Y deux v.a. de Bernoulli de même paramètre p. On définit $U = X + Y$ et $V = X - Y$.
1- Donner la loi de (U, V).
2- Calculer $\mathrm{cov}(U, V)$.
3- U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 4.5
On lance deux dés équilibrés, on note S la somme des dés, X le reste de la division euclidienne de S par 2 et Y le reste de la division euclidienne de S par 4. S, X et Y sont trois v.a.
1- Déterminer la loi conjointe de (X, Y), i.e. $p[(X = n) \cap (Y = k)]$.
2- Donner les lois marginales.
3- X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 4.6
On dispose d'une pièce de monnaie dont la probabilité de donner "pile" est p. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de lancers pour obtenir "pile" la première fois.
Lors d'une expérience aléatoire, soit n le nombre de fois qu'on a dû lancer la pièce pour obtenir "pile" la première fois. On relance alors encore n fois la pièce et on définit Y, la variable aléatoire donnant le nombre de "pile" obtenus dans cette deuxième série de lancers.
1- Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
2- Déterminer la loi du couple (X, Y), i.e. $P[(X = n) \cap (Y = k)]$.
3- En déduire la loi de Y, son espérance et sa variance.
4- X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 4.7
Deux émetteurs de particules émettent chacun une particule pendant l'intervalle de temps $[0, T]$. On note X et Y les temps d'émission des deux particules émises respectivement par chacune des deux sources. La loi de (X, Y) est la loi uniforme sur $[0, T]^2$.
Un récepteur est positionné pour compter les particules. On sait que s'il reçoit une particule à l'instant t, il est inhibé pendant tout l'intervalle $[t, t + h]$, i.e. il ne prend plus rien en compte. $h > 0$ est connu.
Calculer la probabilité qu'au bout de la durée T le compteur n'ait compté qu'une seule particule.

Exercice 4.8 *Problème de rencontre*
A et B ont rendez-vous en un lieu entre 12h et 13h. Les instants d'arrivée de A et B sont indépendants. Ils attendent un quart d'heure puis repartent. Calculer la probabilité qu'ils se rencontrent.

Exercice 4.9
Deux sources émettent un nombre aléatoire de particules, X pour la première et Y pour la seconde. La loi conjointe du couple (X, Y) est donnée par $P[(X = k) \cap (Y = l)] = \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\mu^l}{l!}$.
Quelle est la probabilité d'avoir n particules émises en tout ?

Exercice 4.10
M est un point pris au hasard sur le cercle unité de $\mathbb{R}^2$. Ses coordonnées sont $X = \cos\theta$ et $Y = \sin\theta$ où θ suit une loi uniforme sur $[0, 2\pi[$.
Calculer $\mathrm{cov}(X, Y)$ et $\mathrm{cov}(X^2, Y^2)$. Qu'en déduire en terme d'indépendance ?

Exercice 4.11
Un point M du plan est choisi au hasard dans le disque unité centré à l'origine.
1) Quelles sont les lois des v.a. coordonnées X et Y ? Ces v.a. sont-elles indépendantes ?
2) Mêmes question avec les coordonnées polaires R et Θ.
3) Calculer la fonction de densité de R^2 et R.

Exercice 4.12
Un vecteur (X, Y) aléatoire sur $\mathbb{R}^2$ a une longueur unité, et sa direction est aléatoire. Sa loi de probabilité est la loi uniforme sur le cercle unité. Donner les lois marginales.

Exercice 4.13
Soit $V = (X, Y)$ de densité $f(x, y) = k$ si $|x| + |y| \leq 1$ et $f(x, y) = 0$ sinon.
1- Calculer k et donner les lois marginales.
2- Calculer $\text{cov}(X, Y)$. Sont-elles indépendantes ?

Exercice 4.14
On lance des flèches sur une cible circulaire de centre O et de rayon R. On suppose que les coordonnées d'impact X et Y sont indépendantes et suivent une loi $\mathcal{N}(0, 2R)$.
1- Calculer la probabilité qu'une flèche touche la cible.
2- Quel est le nombre minimum de flèches à lancer pour être sûr à 90% qu'au moins une flèche a touché la cible.

Exercice 4.15
On tire au hasard et avec remise deux nombres parmi $\{0, 1, 2, 3\}$. X et Y sont respectivement le plus petit et le plus grand des deux nombres.
1- Quelle est la loi du couple (X, Y) ?
2- En déduire les lois marginales.
3- X et Y sont-elles indépendantes ?
4- Calculer la covariance de X et Y.

Exercice 4.16
Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^2$ de loi à densité f donnée par $f(x, y) = \frac{2}{\mathrm{e}-1} x \mathrm{e}^y$ si $(x, y) \in [0, 1]^2$, et $f(x, y) = 0$ sinon.
1- Déterminer les densités des lois marginales.
2- X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 4.17
Une machine outil fabrique des plaques carrées dont le côté, mesuré en centimètre, suit une loi normale $\mathcal{N}(10; 0, 4)$.
Quelle est la probabilité d'obtenir une plaque d'aire au moins 110 cm^2 ?

Exercice 4.18
Soient X et Y deux v.a.r. telles que la loi du vecteur (X, Y) admet une densité $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ définie par $f(x, y) = \alpha \exp(-y)$ si $0 \leq x \leq y$ et 0 sinon, pour un certain α réel.
X et Y sont elles indépendantes ? (On pourra déterminer leur lois.)

Exercice 4.19
Soit X une v.a.r., montrer que $V = (X, X)$ n'est pas un vecteur aléatoire à densité.

Exercice 4.20
On dispose d'une feuille blanche de papier grand format sur laquelle on trace, successivement et à partir d'un bord, des lignes parallèles également espacées d'une distance $a > 0$. On jette au hasard sur la feuille une épingle de longueur $l > 0$.
Calculer la probabilité que l'épingle rencontre au moins une des lignes tracées et en donner un équivalent lorsque $l >> a$.

5 Inégalités et Convergences

Exercice 5.1 *Inégalité de Markov*
Soit X une v.a.r. positive, montrer, pour les v.a. au programme, que pour tout $a > 0$ on a

$$P(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

Exercice 5.2 *Inégalité de Bienaymé-Tchebychev*
Soit X une v.a.r., montrer, pour les v.a. au programme, que pour tout $a > 0$ on a

$$P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{1}{a^2}\mathbb{E}\Big[\Big(X - \mathbb{E}(X)\Big)^2\Big]$$

Exercice 5.3
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires telle que $\mathbb{E}(X_n) \to \mu$ et $V(X_n) \to 0$. Montrer alors que $X_n \to \mu$ en probabilité, i.e. pour tout $\varepsilon > 0$, $P(|X_n - \mu| > \varepsilon) \to 0$.

Exercice 5.4
Pour X_1, ..., X_n, n variables aléatoires indépendantes, de même loi de Bernoulli $B(p)$, on pose $F_n = \dfrac{X_1 + ... + X_n}{n}$, la v.a. qui modélise la fréquence de succès dans un schéma de Bernoulli.
1) Montrer que $\mathbb{E}(F_n) = p$ et $V(F_n) = \dfrac{p(1-p)}{n}$.
2) En déduire que la suite (F_n) converge en probabilité vers p.

Exercice 5.5
Soit X_1, ..., X_n, n variables aléatoires indépendantes, de même loi. On suppose en outre que cette loi admet une espérance, notée μ, et une variance, notée σ^2. On définit la variable aléatoire

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + ... + X_n}{n}$$

Calculer $\mathbb{E}(\overline{X}_n)$ et $V(\overline{X}_n)$ et en déduire que la suite $(\overline{X}_n)$ converge en probabilité vers μ.

Exercice 5.6 *La méthode de Monte-Carlo*
Soit (X_n) une suite de v.a.r. indépendantes suivant la même loi uniforme sur $[0, 1]$, et $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une application continue. On pose $Z_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(X_i)$.
Montrer que (Z_n) converge en probabilité vers une constante qu'on précisera.