IUFM La seyne sur Mer
Préparation au CAPES
2009-2010

Espaces vectoriels normés - topologie

1 Cas de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$

Exercice 1.1

1. Soit $(I_k)_{1\leq k\leq n}$ une famille finie d'intervalles de $\mathbb{R}$ vérifiant:

$$\forall k, l \in \{1, \ldots, n\}, \qquad I_k \cap I_l \neq \emptyset\,.$$

   Démontrer qu'il existe $\alpha, \beta \in \{1, \ldots, n\}$ tels que

$$\bigcup_{1\leq k\leq n} I_k = I_\alpha \cup I_\beta\,.$$

2. Soit $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille quelconque d'intervalles de $\mathbb{R}$ vérifiant:

$$\forall \alpha, \beta \in A, \qquad I_\alpha \cap I_\beta \neq \emptyset\,.$$

   Démontrer que $\bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha$ est un intervalle. Donner un exemple montrant que la propriété de la question précédente n'est plus forcément vérifiée.

Exercice 1.2

1. Démontrer que la valeur absolue est une norme sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que la fonction $\|.\|_\infty : (x_1, x_2) \mapsto \max\{|x_1|, |x_2|\}$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
3. Dessiner la boule unité ouverte $B(0, 1)$ dans chacun des cas précédents.

Exercice 1.3
Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Démontrer que $]a, b[= B(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2})$ dans l'evn $(\mathbb{R}, |.|)$.

Exercice 1.4
Décrire les intervalles bornés de $\mathbb{R}$. Calculer le diamètre d'un tel intervalle en fonction de ses extrémités.

Exercice 1.5
Soit $x \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$, quel est le diamètre de la boule ouverte $B(x, r)$?

Exercice 1.6
Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit x, x' des éléments de E et r, r' deux réels strictement positifs. On suppose que $B(x, r) = B(x', r')$. Démontrer que $x = x'$ et $r = r'$. *[On pourra s'aider d'un dessin et traiter d'abord les cas $E = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$.]*

Exercice 1.7

1. Démontrer qu'un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. *[On pourra s'aider d'un dessin.]*

2. Démontrer qu'un segment de $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$, démontrer que la boule ouverte $B(x, r)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. *[On pourra s'aider d'un dessin.]*

4. Soit $x \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$, démontrer que la boule fermée $\overline{B}(x, r)$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1.8
Donner l'intérieur, l'adhérence et la frontière des parties suivantes de $\mathbb{R}$:

1. $[a, b]$, $]a, b]$, $[a, b[$ et $]a, b[$ pour des réels $a < b$.

2. $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exercice 1.9
Donner l'intérieur, l'adhérence et la frontière des parties suivantes de $\mathbb{R}^2$:

1. la boule ouverte $B(x, r)$ pour $x \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$.

2. $\{(x_1, x_2) : \|(x_1, x_2)\| \leq 1 \quad et \quad x_1 + x_2 \leq 1\}$. *[On pourra s'aider d'un dessin.]*

3. $\{(x_1, x_2) : x_1 > 0 \quad et \quad 0 < x_2 < \frac{1}{x_1}\}$. *[On pourra s'aider d'un dessin.]*

Exercice 1.10
Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$, démontrer que

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}, \quad int(A) \cup int(B) \subset int(A \cup B), \quad int(A) \cap int(B) = int(A \cap B).$$

Donner des exemples pour montrer que les inclusions peuvent être strictes.

Exercice 1.11
Soit a, b deux réels tels que $a < b$.

1. Construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $]a, b[$ telle que $x_n \to \frac{a+b}{2}$ lorsque $n \to +\infty$.

2. Construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $]a, b[$ telle que $x_n \to a$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 1.12
Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Démontrer que sa borne supérieure $\sup(A)$ est dans l'adhérence de A.

Exercice 1.13
Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On définit:

$$A + B = \{a + b : a \in A \quad et \quad b \in B\}.$$

1. Démontrer que $[0, 1] + [0, 1] = [0, 2]$.

2. Démontrer que si A est un ouvert de $\mathbb{R}$ alors $A + B$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

3. Donner un exemple de parties A et B fermées de $\mathbb{R}$ pour lesquelles $A + B$ n'est pas fermé.

2 Convergence et limite

Exercice 2.1

1. Soit $A := [0, 1[\cup\{2\}$. Quels sont les points d'accumulation de A? Quels sont les points isolés A?

2. Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, et B une partie non vide de E. Soit x un point d'accumulation de B. Construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de B tous différents de x et convergeant vers x quand n tend vers l'infini.

3. Démontrer que la construction demandée à la question précédente est impossible dans le cas où x est un point isolé de B.

Exercice 2.2
Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.

1. Démontrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente alors elle est bornée.

2. Démontrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente alors elle est de Cauchy.

Exercice 2.3
Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, démontrer l'inégalité:

$$\forall x, y \in E, \qquad |\, \|y\| - \|x\| \,| \leq \|y - x\|.$$

En déduire que si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E converge dans E vers un point x alors $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\|x\|$.

Exercice 2.4
On munit $\mathbb{R}^d$ de la norme euclidienne canonique:

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \qquad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} x_i^2}.$$

1. Démontrer que cette norme est équivalente à la norme l^∞:

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \qquad \|x\|_\infty := \max_i\{|x_i|\}.$$

2. Démontrer qu'une suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^d$ converge vers un vecteur x si et seulement si pour tout i dans $\{1, \ldots, d\}$ la suite $(x_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ des i-ème coordonées converge vers x_i dans $\mathbb{R}$.

3 Continuité

Exercice 3.1
Soit $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application continue.
Démontrer que pour tout ouvert U de F l'ensemble $f^{-1}(U)$ est un ouvert de E.
Démontrer que pour tout fermé W de F l'ensemble $f^{-1}(W)$ est un fermé de E.

Exercice 3.2
Soit $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et A une partie de E. Soit $f : A \to F$ et $a \in \overline{A}$. Démontrer que f est continue en a dans A si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Exercice 3.3
Soit $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés.

1. Soit A une partie non vide de E, $f : A \to F$ une application et L un réel strictement positif. On dit que f est L-Lipschitzienne sur A si

$$\forall x, y \in A, \qquad \|f(y) - f(x)\|_F \leq L \|y - x\|_E$$

   Démontrer que si f est L-Lipschitzienne sur A alors elle est continue sur A.

2. Soit A une partie non vide de E, on définit la fonction *distance à* A par

$$\begin{array}{rccl} d(.,A): & E & \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & d(x,A) = \inf\{\|x-a\| \,:\, a \in A\}. \end{array}$$

   Démontrer que cette fonction est bien définie et qu'elle est 1-Lipschitzienne sur E.

Exercice 3.4
Trouver une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui est continue sur chaque droite passant par $(0,0)$ mais n'est pas continue en $(0,0)$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3.5
Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et r un réel strictement positif. Montrer que la fonction $f : E \to B(0,r)$ donnée par

$$\forall x \in E, \qquad f(x) = \frac{r\,x}{1 + \|x\|}$$

est un homéomorphisme de E dans $B(0,r)$.

4 Applications linéaires continues

Exercice 4.1
Soit $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application linéaire. Démontrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. f est continue sur E.

2. f est continue en 0.

3. il exite une constante réelle L telle que

$$\forall x \in E, \qquad \|f(x)\|_F \leq L \|x\|_E.$$

4. il exite une constante réelle L telle que

$$\forall x, y \in E, \qquad \|f(y) - f(x)\|_F \leq L \|y - x\|_E.$$

Exercice 4.2
On munit $\mathbb{R}^d$ de la norme l^∞ donnée par:

$$\forall x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \qquad \|x\|_\infty := \max_i \{|x_i|\},$$

et on dénote par $(e_1, \dots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$. On considère également un espace vectoriel normé $(E, \|.\|_E)$. Soit $f : \mathbb{R}^d \to E$ une application linéaire.

1. Démontrer que
$$\forall x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \qquad \|f(x)\|_E \leq L \, \|x\|_\infty$$
pour une constante L que l'on déterminera en fonction des $f(e_i)$.

2. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}^d$.

Exercice 4.3
Pour $d \geq 1$, on munit l'espace des matrices $n \times n$ complexes $M_d(\mathbb{C})$ de la norme

$$\forall M = (M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq d} \in M_d(\mathbb{C}), \qquad \|M\| := d \max_{1 \leq i,j \leq d} |M_{i,j}|$$

1. Montrer que $\|.\|$ est effectivement une norme sur $M_d(\mathbb{C})$,

2. Montrer que
$$\forall M, N \in M_d(\mathbb{C}), \qquad \|M\,N\| \leq \|M\| \, \|N\|.$$

3. trouver la norme subordonnée de l'application linéaire
$$\begin{array}{cccc} \phi : & M_d(\mathbb{C}) & \to & \mathbb{C} \\ & M & \mapsto & tr(M). \end{array}$$

Reprendre toutes les questions précédentes avec la norme

$$\forall M = (M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq d} \in M_d(\mathbb{C}), \qquad \|M\|_1 := \max_{1 \leq i \leq d} \sum_{j=1}^{d} |M_{i,j}|$$

Exercice 4.4
Pour $d \geq 1$, on considère les trois normes suivantes sur $M_d(\mathbb{R})$:

1. $N_1 : M \mapsto N_1(M)$ la norme subordonnée de l'application linéaire $M : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ lorsqu'on munit $\mathbb{R}^d$ de la norme euclidienne canonique,

2. $N_2 : M \mapsto N_2(M)$ la norme subordonnée de l'application linéaire $M : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ lorsqu'on munit $\mathbb{R}^d$ de la norme l^∞.

3. $N_3 : M \mapsto N_3(M) := \max_{i,j} |M_{i,j}|$ la norme l^∞ de M considérée comme un élément de $\mathbb{R}^{d \times d}$,

On sait que ces trois normes sont équivalentes. Donner les meilleures constantes dans les inégalités d'equivalence de ces normes.

Exercice 4.5
On munit $\mathbb{C}[X]$ de la norme

$$\forall P = \sum_{k=0}^{n} a_i\, X^i \; \in \mathbb{C}[X], \qquad \|P\| = \sup_{0\leq k\leq n} |a_i|.$$

Etudier la continuité des applications linéaires suivantes sur $\mathbb{C}[X]$:

1. $f : P \mapsto P'$.
2. $g : P \mapsto (X+1)P$.
3. $h : P \mapsto P(x_0)$ pour un complexe x_0: on distinguera les cas $|x_0| < 1$ et $|x_0| \geq 1$.

Exercice 4.6
Soit f une forme linéaire continue sur un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$. On définit l'hyperplan $H := kerf(f)$. Montrer que

$$\forall x \in E \setminus H, \qquad d(x, H) = \frac{|f(x)|}{|||f|||}$$

où la distance à H est définie comme dans l'exercice 3.3.

Exercice 4.7
Soit $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application linéaire. On suppose que, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élément de E qui converge vers 0 quand n tend vers l'infini, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans F. Démontrer que f est continue en 0 (et donc continue).

Exercice 4.8
Soit $l^1 \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ le sous-espace vectoriel des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes telles que la série $\sum_n |u_n|$ converge. Vérifier que l'application $u \mapsto \|u\| := \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ est une norme sur l^1.
On définit une application bilinéaire p sur $l^1 \times l^1$ par

$$\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1,\ \forall v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1, \qquad p(u,v) = w \quad avec \quad \forall n \geq 0, \quad w_n := \sum_{p=0}^{n} u_p\, v_{n-p}.$$

Vérifier que p est à valeurs dans l^1, et que p est continue en calculant sa norme $|||p|||$:

$$|||p||| = \sup\{\|p(u,v)\| \ :\ u, v \in l^1,\ \ \|u\| = \|v\| = 1\}.$$

5 Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 5.1
Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie d, et $(e_1, \ldots, e_d)$ une base de E. On munit E de la norme $\|.\|_\infty$ définie par

$$x = x_1\, e_1 + \ldots + x_d\, e_d \quad \mapsto \quad \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq d} |x_i|.$$

Montrer que $\|.\|_\infty$ est bien une norme sur E. En s'appuyant sur les propriétés connues sur $\mathbb{R}$ (et l'exercice 2.4), montrer que

1. toute suite de Cauchy dans E est convergente.
2. de toute suite bornée d'éléments de E on peut extraire une sous-suite convergente.
3. Montrer qu'une partie de E est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

Exercice 5.2
Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, A une partie compacte et non vide de E et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Montrer que f est bornée sur A, et qu'elle atteint son minimum et son maximum sur A.
2. Donner des contre-exemples aux résultats de la question précédente lorsque A n'est pas compact.

Exercice 5.3
Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie d, et $(e_1, \ldots, e_d)$ une base de E. On munit E de la norme $\|.\|_\infty$ définie par

$$\forall x = x_1\, e_1 + \ldots + x_d\, e_d \in E, \qquad \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq d} |x_i|.$$

Soit $\|.\|$ une autre norme sur E.

1. Démontrer que
$$|\, \|y\| - \|x\|\, | \leq \|y - x\|_\infty \sum_{i=1}^{d} \|e_i\|$$
pour tout couple (x, y) d'éléments de E, avec $x = x_1\, e_1 + \ldots + x_d\, e_d$ et $y = y_1\, e_1 + \ldots + y_d\, e_d$.

2. Montrer que l'ensemble $\{x \in E \,:\, \|x\|_\infty = 1\}$ est un compact de E.

3. En déduire qu'il existe deux réels strictement positifs $a < b$ tels que $a \leq \|x\| \leq b$ pour tout x tel que $\|x\|_\infty = 1$.

4. Déduire des questions précédentes que les normes $\|.\|_\infty$ et $\|.\|$ sont équivalentes sur E.

5. Retrouver le résultat du cours: toutes les normes sur E sont équivalentes.

Exercice 5.4
Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, et A et B deux parties compactes et disjointes de E. Démontrer que

$$\min\{\|b-a\|_E \,:\, a \in A,\ b \in B\} \ > \ 0.$$

Ce nombre est appelé *distance de A à B*. Déduire de ce qui précède qu'il existe deux ouverts U et V disjoints tels que $A \subset U$ et $B \subset V$ (*on pourra s'aider d'un dessin*).

Exercice 5.5
Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \geq 0,\ \forall x \in E, \qquad \|x\|_E \geq M \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon.$$

Démontrer que f atteint son minimum sur E.

Exercice 5.6
Soit d un entier non nul. On munit $\mathbb{R}^d$ d'une norme $\|.\|$, et on lui associe la norme sur $M_d(\mathbb{R})$ définie par

$$M \ \mapsto \ |||M||| := \sup\{\|Mx\| \,:\, x \in \mathbb{R}^d, \|x\| = 1\}.$$

Démontrer que $|||.|||$ est une norme d'algèbre pour $M_d(\mathbb{R})$.

Soit maintenant $P \in M_d(\mathbb{R})$ tel que $|||P||| < 1$.

1. Démontrer que la suite de terme général $Q_n = \sum_{k=0}^{n} P^k$ est une suite de Cauchy dans $M_d(\mathbb{R})$.

2. En déduire que la limite Q de $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $M_d(\mathbb{R})$ existe, et vérifier que Q est l'inverse de $I_d - P$ (où I_d est la matrice identité de $M_d(\mathbb{R})$).

Exercice 5.7
Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et A une partie compacte de E. Démontrer que si $f : E \to \mathbb{R}$ est une application linéaire, alors le maximum de f sur A est atteint en un point de la frontière ∂A de A (il peut aussi être atteint pour d'autres points de $\overline{A}$ dans des cas particuliers).

6 Espaces complets

Rappel: un espace $(E, \|.\|_E)$ est un espace de Banach si c'est un espace vectoriel normé complet.

Exercice 6.1
Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace de Banach, et $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une série d'éléments de E. On suppose que la série $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge absolument. Démontrer qu'elle est convergente dans E.

Exercice 6.2 (Point fixe d'une application contractante)
Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace de Banach, A une partie non vide et fermée de E. Soit $T : A \to A$ une application *contractante*, c'est-à-dire qu'il existe $L \in]0,1[$ tel que

$$\forall x, y \in A, \qquad \|T(y) - T(x)\| \leq L\|y - x\|.$$

Soit $x_0 \in A$, on définit par récurrence sur $n \geq 1$ la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ par $x_{n+1} = T(x_n)$.

1. Démontrer que T est continue sur A.
2. Démontrer que
$$\forall n \geq 1, \qquad \|x_{n+1} - x_n\| \leq L^n \|x_1 - x_0\|.$$
En déduire que $(x_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy de A.
3. Démontrer que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge dans A, et que sa limite x est un point fixe de T dans A.

Exercice 6.3 (Point fixes - suite)
Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé, A une partie non vide et fermée de E. Soit $T : A \to A$ une application telle que

$$\forall x, y \in A, \qquad \|T(y) - T(x)\| < \|y - x\|.$$

1. Démontrer que si on suppose que A est compacte, alors T admet un point fixe dans A. Pour cela, on pourra étudier la fonction $x \mapsto \|T(x) - x\|$.
2. Démontrer que le résultat précédent est faux si $A = \mathbb{R}_+$.
3. Démontrer que le résultat précédent est faux si on a seulement
$$\forall x, y \in A, \qquad \|T(y) - T(x)\| \leq \|y - x\|.$$

Exercice 6.4 (Fermés emboités)
Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace de Banach, et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés non vides de E. On suppose que

$$(\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+1} \subset F_n) \qquad et \qquad \lim_{n\to+\infty} diam(F_n) = 0.$$

1. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de E telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_n \in F_n.$$
Démontrer que $(x_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy de E
2. Démontrer que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est un singleton.

Exercice 6.5 (Critère de Cauchy pour une application)
Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé et $(F, \|.\|_F)$ un espace de Banach. Soit A une partie non vide de E et $a \in \overline{A}$. Soit $f : A \to F$ une application. Démontrer que f admet une limite en a dans A si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinnage U de a dans E tel que $diam(f(A \cap U)) \leq \varepsilon$. *(pour l'implication $\Leftarrow$ on pourra utiliser le résultat de l'exercice 6.4).*

Exercice 6.6
On munit l'ensemble $C^0([0,1], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de la norme:

$$f \mapsto \|f\| := \int_0^1 |f(x)| dx.$$

1. Démontrer que $\|.\|$ est une norme sur $C^0([0,1], \mathbb{R})$.
2. pour tout $n \geq 1$ on définit la fonction f_n sur $[0,1]$ par

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{n^2}\right], \qquad f_n(x) = n^3\, x$$

et

$$\forall x \in \left[\frac{1}{n^2}, 1\right], \qquad f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Démontrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $(C^0([0,1], \mathbb{R}), \|.\|)$.

3. Prouver que $(C^0([0,1], \mathbb{R}), \|.\|)$ n'est pas complet.

7 Suites d'applications à valeurs dans un espace de Banach

Exercice 7.1 (Théorème de Dini)
Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé, K un compact de E et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur K et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On suppose que pour tout élément $x \in K$, la suite de nombres réels $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ décroit vers 0. Démontrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur E vers la fonction nulle.
Indication: on pourra raisonner par l'absurde, et construire une suite $(x_n)_n$ dans K telle que $(f_n(x_n))_n$ ne tend pas vers 0.

8 Connexité

Exercice 8.1 (Cas de $\mathbb{R}$)

1. Démontrer que les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.
2. Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé et U un ouvert non vide de E. Démontrer que toute composante connexe de U est un ouvert de E.
3. Démontrer qu'un ouvert de $\mathbb{R}$ est une réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts.

Exercice 8.2
Soit $d \geq 2$. Démontrer que le complémentaire de la boule unité $B(0,1)$ dans $\mathbb{R}^d$ est connexe par arcs. Cela est-il vrai pour $d = 1$?

Exercice 8.3 (Connexité par arcs)
Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé.

1. Soit A une partie connexe par arcs et non vide de E. Démontrer que A est connexe.
2. On suppose que A est un ouvert connexe non vide de E. Démontrer que A est connexe par arcs.
   Indication: pour cela, il suffit de considérer une composante connexe de A, et de démontrer qu'elle est ouverte et fermée dans A.
3. On considère la partie A suivante dans R^2:
$$A := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > 0, y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right\} \,\cup\, \{0\} \times [-1,1].$$
   Démontrer que A est connexe, mais que A n'est pas connexe par arcs.
   Indication: ce dernier point peut être traité par l'absurde, en considérant un chemin continu $\gamma : [0,1] \to A$ joignant $(\frac{2}{\pi}, 1)$ et $(0,0)$, et en appelant t le plus petit réel tel que $\gamma(t) \in \{0\} \times [-1,1]$.

Exercice 8.4
Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. En étudiant la fonction $x \mapsto f(x) - x$, démontrer que f a au moins un point fixe sur $[0,1]$.

Exercice 8.5
Soit un automobiliste qui a parcouru $1000km$ en $10h$. On suppose que sa position est une fonction continue du temps. Démontrer qu'il existe un intervalle de temps d'une heure pendant lequel il a parcouru exactement $100km$ (c'est-à-dire qu'il existe un instant t tel que l'automobiliste a parcouru exactement $100km$ entre t et $t + 1h$).

Exercice 8.6
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $\mathbb{R}$. On suppose de plus que $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = 0$. Soit A l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Démontrer que A est non vide, compact et connexe.

Exercice 8.7 (Exemple de $GL_d(\mathbb{R})$)
Soit $d \geq 1$, on note $GL_d(R)$ l'ensemble des matrices inversibles de $M_d(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que $GL_d(R)$ est un ouvert de $M_d(\mathbb{R})$.

2. Démontrer que $GL_d(R)$ a au moins deux composantes connexes.

Indication: penser au déterminant.