D'après EHEC 2004 Section E

Dans tout le problème, on considère une suite infinie de lancers d'une pièce de monnaie dont l'issue est soit *pile* soit *face*.
On note $p \in]0,1[$ la probabilité d'apparition de *pile* lors d'un lancer. Ainsi, la probabilité d'apparition, lors d'un lancer de *face* est $1-p$. On modélise l'expérience aléatoire qui consiste en un lancer par l'univers $\Omega_1 = \{pile, face\}$ muni de la loi de Bernoulli de paramètre p. En outre, on suppose que les lancers sont indépendants.
On modélise l'expérience aléatoire par l'univers $\Omega = \{pile, face\}^{\mathbb{N}^*}$ des suites indexées par $\mathbb{N}^*$ et à valeurs dans Ω_1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note π_n la projection de Ω sur Ω_1 définie pour tout $\omega \in \Omega$ par $\pi_n(\omega) = \omega_n$, le n-ième terme de la suite ω ($\pi_n(\omega)$ est donc le résultat du n-ième lancer dans la suite infinie ω). On pose alors $R_n = \pi_n^{-1}(pile)$ et $S_n = \pi_n^{-1}(face)$. On note $\mathcal{A}$ la tribu engendrée par les sous-ensembles R_n et S_n de Ω.
Si A est un événement d'un espace probabilisé, on note $\overline{A}$ son événement contraire.
Si l'on ne considère que les n premiers lancers, $n \in \mathbb{N}^*$, on modélise l'expérience aléatoire par l'univers fini usuel $\Omega_n = \{pile, face\}^n$ muni de la probabilité P_n définie sur les événements élémentaires $\{(\omega_1, ..., \omega_n)\}$ de Ω_n par :

$$P_n\Big(\{(\omega_1, ..., \omega_n)\}\Big) = p^k(1-p)^{n-k}$$

où k est le nombre de *piles* qui apparaissent dans $(\omega_1, ..., \omega_n)$.

On admet que l'on peut définir une unique probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$ de la manière suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall A_n \subset \Omega_n,\ P\Big(A_n \times \{pile, face\}^{[n+1,+\infty[\cap\mathbb{N}}\Big) = P_n(A_n)$$

Partie I : Fonction génératrice

On considère une variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout entier n, on pose : $a_n = P(X = n)$.

1. Montrer que la série entière de terme général $a_n x^n$ converge pour tout x de $[0,1]$.
   On appelle fonction génératrice de la variable aléatoire réelle X l'application f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

2. On suppose dans cette question que f est dérivable en 1.

   a) Etablir l'égalité suivante pour tout x de $[0,1[$:

   $$\frac{f(1) - f(x)}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k\right)$$

   b) En déduire que la fonction $q : x \mapsto \frac{f(1)-f(x)}{1-x}$ est croissante sur $[0,1[$. Donner la borne supérieure de q sur $[0,1[$.

c) Montrer que la série $\sum na_n$ est convergente. (On pourra montrer que pour tout entier non nul N on a $\sum_{n=1}^{N} na_n \leq \sup_{[0,1[} q$.)

d) En déduire que X admet une espérance mathématique et qu'elle est donnée par la formule :

$$\mathbb{E}(X) = f'(1)$$

3. On suppose dans cette question que f est deux fois dérivable en 1.

a) Montrer que la série $\sum n(n-1)a_n$ converge et a pour somme $f''(1)$. (On pourra s'inspirer du résultat de la question précédente.)

b) En déduire que X admet une variance et qu'elle est donnée par la formule :

$$V(X) = f''(1) + f'(1) - f'(1)^2$$

4. On étudie ici les réciproques.

a) Si X admet une espérance, est-il vrai que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = \mathbb{E}(X)$?

b) Si X admet une espérance et une variance, est-il vrai que f est deux fois dérivable en 1 et que $f''(1) = V(X) - \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2$?

Partie II : Loi du temps d'attente de la première configuration "*pile, pile, face*"

Soit Y la variable aléatoire désignant le rang du lancer où pour la première fois apparaît un *face* précédé de deux *piles* si cette configuration apparaît, et prenant la valeur 0 si celle-ci n'apparaît jamais.
Pour tout entier n on note $y_n = P(Y = n)$; on note également, pour $n \geq 3$, B_n l'événement $R_{n-2} \cap R_{n-1} \cap S_n$ et U_n l'événement $\bigcup_{i=3}^{n} B_i$.

1. Calculer y_1, y_2, y_3 et y_4.

2. On pose $u_0 = u_1 = u_2 = 0$ et pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $u_n = P(U_n)$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

3. Dans cette question, n désigne un entier supérieur ou égal à 3.

a) Montrer que la probabilité de l'événement B_n est égale à $p^2(1-p)$.
On note a cette valeur $p^2(1-p)$.

b) Montrer l'encadrement suivant : $0 < a \leq \frac{4}{27}$.

c) Montrer que les événements B_n, B_{n+1} et B_{n+2} sont deux à deux incompatibles.

d) Calculer les nombres u_3, u_4 et u_5 en fonction de a.

4. Dans cette question, n désigne un entier supérieur ou égal à 3.

a) Justifier l'égalité des événements $U_{n+2} \bigcap B_{n+3}$ et $U_n \bigcap B_{n+3}$; en déduire la probabilité de $U_{n+2} \bigcap B_{n+3}$ en fonction de a et u_n.

b) Exprimer l'événement U_{n+3} en fonction des événements U_{n+2} et B_{n+3} puis montrer l'égalité suivante :

$$u_{n+3} = u_{n+2} + a(1 - u_n)$$

c) Calculer la limite de la suite (u_n) et en déduire que $y_0 = 0$. Interpréter ces deux valeurs.

5. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = 1 - u_n$.

a) Vérifier que pour tout entier naturel n on a :

$$v_{n+3} = v_{n+2} - av_n$$

b) On note $\mathcal{E}_p$ l'ensemble des suites indexées par $\mathbb{N}$ qui satisfont la relation précédente pour tout entier naturel n. Montrer que $\mathcal{E}_p$ a une structure d'espace vecoriel sur $\mathbb{R}$. Est-il de dimension finie ? Si oui, donner sa dimension.

6. On suppose dans cette question que $p \neq \frac{2}{3}$.

a) Montrer que l'équation $t^3 - t^2 + a = 0$ admet trois racines réelles simples α, β et γ telles que $-\frac{1}{3} \leq \gamma < 0 < \beta < \frac{2}{3} < \alpha < 1$.

b) En déduire qu'il existe un unique triplet de réels (A, B, C) tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = A\alpha^n + B\beta^n + C\gamma^n$$

c) Calculer les quantités $A + B + C$, $\alpha A + \beta B + \gamma C$ et $\alpha^2 A + \beta^2 B + \gamma^2 C$.

d) Calculer les quantités $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$ et $\alpha\beta\gamma$.

e) Déduire de c) et d) que :

$$A(\beta + \gamma) + B(\alpha + \gamma) + C(\alpha + \beta) = 0 \qquad \text{et} \qquad A\beta\gamma + B\alpha\gamma + C\alpha\beta = 0$$

7. On suppose dans cette question que $p = \frac{2}{3}$.

a) Résoudre explicitement l'équation $t^3 - t^2 + a = 0$.

b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{8}{9} + \frac{2}{3}n\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

8. a) On note R_v le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} v_n x^n$. Calculer R_v et montrer que $R_v > 1$.

b) On note $v(x)$ la somme de cette série entière pour $x \in [0, 1]$. Montrer l'égalité suivante valable pour tout $x \in [0, 1]$:

$$v(x) = \frac{1}{1 - x + ax^3}$$

c) Calculer $v(1)$ et $v'(1)$.

9. On pose pour tout $x \in [0,1]$: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n$.

   a) Soit n un entier supérieur à 4. Exprimer l'événement $(Y = n)$ en fonction des événements $\overline{U_{n-1}}$ et U_n. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité $y_n = v_{n-1} - v_n$ (on pourra remarquer que $\overline{U_{n-1}} \bigcup U_n = \Omega$).

   b) Montrer, pour tout x de $[0,1]$, l'identité suivante :

$$y(x) = (x-1)v(x) + 1$$

10. a) Montrer que la loi de la variable aléatoire Y ne dépend que du paramètre $a = p^2(1-p)$. *On note alors $\mathcal{J}(a)$ la loi de Y.*

   b) Montrer que Y admet une espérance et une variance données par :

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{a} \qquad \text{et} \qquad V(Y) = \frac{1-5a}{a^2}$$

   c) Montrer que $\mathbb{E}(Y)$ et $V(Y)$ atteignent leur minimum pour une même et unique valeur p_m de p. Donner p_m et les valeurs correspondantes de $\mathbb{E}(Y)$, de $V(Y)$ ainsi que la valeur $a_m = p_m^2(1-p_m)$ prise par a.

Partie III : Paradoxe de Walter Penney (1969)

Deux joueurs J et J' s'affrontent dans un jeu utilisant la même expérience aléatoire que précédemment avec les règles suivantes :

- le joueur J est gagnant si la configuration "*pile,pile,face*" apparaît dans la suite des résultats des lancers avant que la configuration "*face,pile,pile*" n'apparaisse ;
- le joueur J' est gagnant si la configuration "*face,pile,pile*" apparaît dans la suite des résultats des lancers avant que la configuration "*pile,pile,face*" n'apparaisse ;
- si l'un des joueurs est gagnant, l'autre est perdant.

Soit Y' la variable aléatoire désignant le rang du lancer où, pour la première fois, apparaît un *pile* précédé d'un *pile* lui-même précédé d'un *face*, et prenant la valeur 0 si celle-ci n'apparaît jamais.

1. Expliquer pourquoi Y' suit la même loi $\mathcal{J}(a)$ que Y. Les variables aléatoires Y et Y' sont-elles indépendantes ?

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on note G_n l'événement "*le joueur J est déclaré gagnant à l'issue du lancer de rang n*" et g_n la probabilité de G_n.

   a) Calculer g_3 et g_4, puis montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a :

$$g_n = (1-p)p^{n-1}$$

   b) En déduire la probabilité pour que le joueur J soit déclaré gagnant.

3. Pour tout entier n non nul, on désigne par D_n l'événement "*lors des n premiers lancers il n'apparaît jamais deux piles consécutifs*" et d_n la probabilité de l'événement D_n.

   a) Calculer d_1 et d_2.

   b) En considérant les résultats des lancers de rang 1 et 2, justifier pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'égalité suivante :

$$d_{n+2} = (1-p)d_{n+1} + p(1-p)d_n$$

   c) Montrer que, en posant $d_0 = 1$, la relation précédente est vraie pour tout entier naturel n, puis que la suite (d_n) est un élément de $\mathcal{E}_p$.

   d) Montrer qu'il existe deux réels, qui dépendent de p, $\lambda \in]-1,0[$ et $\mu \in]0,1[$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ d_n = \frac{1}{\mu-\lambda}\Big((1-\lambda)\mu^n - (1-\mu)\lambda^n\Big)$$

   e) Montrer l'égalité des ensembles $\{\lambda,\mu,p\}$ et $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ (α, β et γ sont définis au III-6-a)).

   f) Montrer que $|\lambda| < \min(p,\mu)$ puis que

$$p < \frac{2}{3} \Longrightarrow \frac{2}{3} < \mu \quad ; \quad p = \frac{2}{3} \Longrightarrow \frac{2}{3} = \mu \quad ; \quad p > \frac{2}{3} \Longrightarrow \frac{2}{3} > \mu$$

4. On désigne par T la variable aléatoire qui prend pour valeur le rang du lancer à l'issue duquel un des joueurs est déclaré gagnant, si cela se produit, et la valeur 0 si aucun des joueurs n'est gagnant.

   a) Justifier, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'égalité :

$$P\Big((T>n)\bigcup(T=0)\Big) = p^n + d_n$$

   b) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 3, l'égalité :

$$P(T=n) = (1-p)p^{n-1} + d_{n-1} - d_n$$

   c) Montrer que la probabilité qu'un des joueurs soit déclaré gagnant est égale à 1.

5. a) Calculer la probabilité que J' soit déclaré gagnant.

   b) Calculer la valeur p_0 du paramètre p qui rend le jeu équitable. Calculer alors $a_0 = p_0^2(1-p_0)$, l'espérance mathématique et la variance de la loi $\mathcal{J}(a_0)$.

   c) Donner toutes les caractéristiques du jeu lorsque la pièce est équilibrée, c'est-à-dire lorsque $p = \frac{1}{2}$. Préciser le joueur à qui profite le jeu.

   d) Soit $e \geq \frac{27}{4}$. On fixe les lois de Y et Y' en imposant $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Y') = e$. Montrer qu'en général on a le choix entre deux jeux qui proviennent de deux valeurs α et β de p. Discuter le nombre de ces jeux qui sont favorables à J.

6. Soit t l'application définie sur $[0,1]$ par :

$$t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(T=n)x^n$$

a) Soit R_d le rayon de convergence de la série entière de terme général $d_n x^n$. Calculer R_d et montrer que $R_d > 1$.

b) Pour $x \in [0,1]$, on note $d(x)$ la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$. Montrer que pour tout x de $[0,1]$ on a :

$$d(x) = \frac{1+px}{1-(1-p)x-p(1-p)x^2}$$

c) Montrer, pour tout x de $[0,1]$, la relation :

$$t(x) = (x-1)\left[d(x) + \frac{p^2x^2}{1-px}\right] + 1$$

d) En déduire que la variable aléatoire T admet une espérance et une variance. Calculer $\mathbb{E}(T)$.

7. Peut-on affirmer que $T = \min(Y, Y')$? Comparer les espérances de T, Y et Y'.

8. Soit N un entier naturel supérieur à 3.

a) Montrer que $P(T > N+1) = p^N + \frac{1}{\mu-\lambda}\Big((1-\lambda)\mu^N - (1-\mu)\lambda^N\Big)$.

b) Montrer que lorsque $N \to \infty$, $P(T > N+1)$ est équivalent à $C_p.(\tau_p)^N$ où C_p et τ_p sont des constantes, à préciser, qui ne dépendent que de p. (On distinguera trois cas selon la position de p par rapport à $\frac{2}{3}$).

c) Tracer la courbe de la fonction $p \to \tau_p$ définie sur $]0,1[$.

Partie IV : Approximation pour un grand nombre de jeux

Soit N un entier naturel non nul. On répète N fois de manière indépendante le jeu exposé à la partie III.
On rappelle que la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ d'espérance m et de variance σ^2 est la loi de densité

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$$

1. On désigne par Z la variable aléatoire qui compte le nombre de fois que le joueur J gagne.

a) Donner la loi de Z, son espérance et sa variance.

b) Pour N grand, justifier l'approximation de la loi de Z par la loi $\mathcal{N}(Np^2, Np^2(1-p^2))$.

2. Soit k un réel de $]0,1[$. On veut estimer la probabilité de l'événement $(Z > kN)$.

a) En faisant l'approximation par une loi normale, montrer que l'on peut approcher $P(Z > kN)$ par :

$$\theta(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\sqrt{N}(k-p^2)}{p\sqrt{1-p^2}}}^{+\infty} \exp\Big(-\frac{t^2}{2}\Big)dt$$

b) Etudier la fonction θ définie pour $p \in]0,1[$ et tracer sa courbe représentative.

c) Résoudre l'équation $\theta(p) = \frac{1}{2}$. Interpréter le résultat lorsque $k = \frac{1}{2}$ et lorsque $k = \frac{1}{4}$.