ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.

CONCOURS D'ADMISSION 1996

MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE ÉPREUVE
OPTIONS M ET P'
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Soit ζ la fonction définie par la relation : $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$. Il est admis que cette fonction ζ est définie et continue sur la demi-droite ouverte $]1, +\infty[$.

L'objet de ce problème est de caractériser, sur l'intervalle $I =]-1, 1]$, la somme $F(x)$ de la série entière de terme général $\frac{(-1)^k}{k}\, \zeta(k)\, x^k$, $k \geq 2$; elle est définie par la relation :

$$F(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}\, \zeta(k)\, x^k.$$

Dans la première partie un calcul explicite donne la valeur de $F(1)$ en fonction de la constante d'Euler γ. L'objet de la deuxième partie est d'exprimer la somme $F(x)$ lorsque le réel x appartient à l'intervalle I en fonction de la constante d'Euler et d'une fonction G dont une propriété fondamentale est établie à la troisième partie.

Dans tout le texte nous usons des notations suivantes :

- pour tout entier naturel k, φ_k désigne la fonction définie sur la demi-droite fermée $[0, \infty[$ par la relation :
$$\varphi_k(x) = \frac{[x]}{x^{k+1}}.$$
L'expression $[x]$ désigne la partie entière du réel positif x : c'est l'entier naturel vérifiant la double inégalité :
$$[x] \leq x < x + 1.$$
- pour tout entier k, supérieur ou égal à 2, S_k et T_k désignent les intégrales impropres ci-dessous :
$$S_k = \int_1^{\infty} \varphi_k(x)\, \mathrm{d}x \ ; \ T_k = \int_2^{\infty} \varphi_k(x)\, \mathrm{d}x \ .$$

Première partie

I-1) Convergence et calcul de l'intégrale généralisée S_k :

a. Étudier la convergence des intégrales impropres S_k et T_k.

b. Exprimer le réel S_k à l'aide de $\zeta(k)$ en considérant, par exemple, la série de terme général $f_n(k)$, $n = 1, 2, \ldots$, défini par la relation ci-dessous :

$$\text{pour tous entiers } n \text{ et } k,\ n \geq 1,\ k \geq 2 : f_n(k) = \int_n^{n+1} \varphi_k(x)\, \mathrm{d}x.$$

I-2) Convergence des séries de termes généraux $(-1)^k S_k$, $k \geq 2$ et $(-1)^k T_k$, $k \geq 2$:

a. Démontrer que la série de terme général $(-1)^k T_k$, $k \geq 2$, est absolument convergente.

b. Démontrer que la série de terme général $(-1)^k S_k$, $k \geq 2$, est convergente.

Soient S et T les sommes de ces séries : $S = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k S_k$; $T = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k T_k$.

c. Déterminer la relation qui lie S et T ; la relation $\ln 2 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p}$ est admise.

I-3) Expression de T à l'aide d'une intégrale :

Soit φ la fonction définie sur la demi-droite $[2, \infty[$ par la relation :

$$\varphi(x) = \frac{[x]}{x^2\,(1+x)}.$$

Démontrer que l'intégrale impropre de la fonction φ étendue à la demi-droite $[2, +\infty[$ est convergente. Exprimer le réel T en fonction de l'intégrale de φ sur cette demi-droite.

I-4) Calcul de S :

Soit $(h_n)_{n\geq 1}$ la suite des réels définis par la relation :

$$\text{pour tout entier } n \text{ strictement positif, } h_n = \frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n}).$$

a. Établir la convergence de la série de terme général h_n, $n \geq 1$. La somme H de cette série est donnée par la relation : $H = \sum_{n=1}^{\infty} h_n$.

b. Déduire des résultats des questions I-2.c et I-3 l'égalité entre les deux réels H et S.

Soit $(c_n)_{n\geq 1}$ la suite de réels définis par la relation : $c_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln n$. Il est admis que cette suite et convergente et que sa limite est la constante d'Euler γ.

c. En exprimant, par exemple, h_n à l'aide de l'expression $c_{n+1} - c_n$, calculer H à l'aide de la constante d'Euler γ. En déduire la valeur de $F(1)$ où F est la fonction définie dans le préambule.

Deuxième partie

II-1) Fonction U_n, $n \geq 1$:

a. Considérons pour un entier naturel n donné, $n \geq 1$, la série entière de terme général $u_{n,k}(x) = \frac{1}{k}\left(\frac{-x}{n}\right)^k$, $k \geq 2$. Déterminer le rayon de convergence R_n de cette série. Préciser la convergence de la série aux extrémités $-R_n$ et R_n de l'intervalle de convergence. Soit J_n l'ensemble des réels x pour lesquels la série de terme général $u_{n,k}(x)$, $k \geq 2$, est convergente : soit U_n la fonction définie dans l'intervalle J_n par la relation :

$$U_n(x) = \sum_{k=2}^{\infty} u_{n,k}(x).$$

b. Exprimer $U_n(x)$ à l'aide de fonctions élémentaires.

c. Soit x un réel donné ; vérifier qu'il existe un entier N tel que le réel x appartienne à l'intervalle J_n pour tout entier n supérieur ou égal à N. Déterminer deux réels A et α tels que $U_n(x)$ soit équivalent à $\dfrac{A}{n^\alpha}$ lorsque n croît vers l'infini.

II-2) <u>Étude de la fonction F</u> :

a. Démontrer l'encadrement : pour tout réel $x > 1$, $1 < \zeta(x) \leq 1 + \dfrac{1}{x-1}$.

b. Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $\dfrac{(-1)^k}{k}\,\zeta(k)\,x^k$, $k \geq 2$. Étudier la convergence aux extrémités de l'intervalle de convergence. Préciser l'ensemble de définition de la somme $F(x)$ de cette série définie dans le préambule.

II-3) <u>Convergence de la série de fonctions U_n, $n \geq 1$, vers la fonction F</u> :

a. Soit A un réel appartenant à l'intervalle ouvert $]0,1[$. Démontrer que la série des fonctions U_n, $n \geq 1$, définies à la question II-1.a, converge uniformément sur l'intervalle $[-A, 1]$.

b. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $I = \,]-1,1]$, la fonction F, définie au préambule, est la somme de la série de fonctions U_n, $n \geq 1$, et qu'elle est continue.

Pour tout entier n strictement positif soit G_n la fonction définie sur la demi-droite ouverte $]-1, \infty[$ par la relation :

$$G_n(x) = \frac{n!\,n^x}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}.$$

II-4) <u>Limite G de la suite G_n, $n \geq 1$</u> :

En utilisant les résultats des question I-4 et II-3.b, démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $I = \,]-1,1]$, la suite de fonctions $x \mapsto \ln\big(G_n(x)\big)$, $n \geq 1$, est convergente et que sa limite est la fonction $x \mapsto F(x) - \gamma\,x$. En déduire que la limite de la suite des restrictions des fonctions G_n à l'intervalle I est une fonction G continue.

Troisième partie

Soit x un réel différent d'un entier relatif ($x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$). Soit f la fonction périodique, de période 2π, définie par la relation :

$$\text{pour tout réel } t \text{ appartenant à } [-\pi, \pi],\ f(t) = \cos(xt).$$

III-1) <u>Expression de $\operatorname{cotg}(\pi x)$ comme somme d'une série</u> :

a. Déterminer le développement en série de Fourier réel de la fonction f définie ci-dessus. Préciser la convergence de la série trigonométrique obtenue et sa somme.

b. Soit la série de fonctions de terme général $v_n(x) = \dfrac{2x}{x^2 - n^2}$, $n \geq 1$; démontrer que cette série est convergente et en déduire, pour x réel différent d'un entier relatif, l'expression de la quantité $\dfrac{1}{x} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ en fonction de $\dfrac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}$.

III-2) Relation fonctionnelle vérifiée par la fonction G :

a. Démontrer que la série de fonctions de terme général v_n, $n \geq 1$, est uniformément convergente sur tout intervalle fermé $K_a = [-a, a]$ où a est un réel compris strictement entre 0 et 1 ($0 < a < 1$). En déduire la relation :

$$\text{pour tout réel } x \text{ appartenant à l'intervalle }]0,1[,\ \ln\left(\frac{\sin(\pi\, x)}{\pi\, x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 - \frac{x^2}{n^2}).$$

b. La lettre G désignant la fonction définie à la question II-3, démontrer que la fonction, définie sur l'intervalle $[0, 1]$, par la relation $x \mapsto G(x)\, G(1-x) \sin(\pi x)$, s'exprime de manière simple à l'aide de la fonction $x \mapsto x\,(1-x)$.

c. Déduire du résultat précédent la valeur de $F(\frac{1}{2})$.

FIN DU PROBLÈME