INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ETUDES ECONOMIQUES
ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE

SESSION 1991

Filière M'

PREMIERE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1.
Nous notons f^n la n-ième itérée de f, c'est-à-dire :

$$f^0 = \mathrm{Id} \quad ; \quad f^{n+1} = f \circ f^n \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \ .$$

Nous dirons que x_0 est un point fixe de f si $f(x_0) = x_0$. Plus généralement, nous dirons que x_0 est un point périodique de f s'il existe un entier $q \geqslant 1$ tel que $f^q(x_0) = x_0$ et nous appellerons période de x_0 le plus petit entier $q \geqslant 1$ vérifiant cette égalité. Si, de plus, la dérivée de f^q en x_0 a une valeur absolue strictement inférieure à 1, nous dirons que x_0 est un point périodique attractif de f. Nous appellerons orbite d'un point périodique x_0 de période q, l'ensemble

$$O(x_0) = \{f^i(x_0) \ , \ 0 \leqslant i \leqslant q-1\} \ ;$$

si x_0 est un point périodique attractif, nous dirons que $O(x_0)$ est une orbite périodique attractive.

QUESTIONS PRELIMINAIRES

a) Montrer la relation suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \qquad (f^n)'(x) = \prod_{0 \leqslant i \leqslant n-1} f'(f^i(x)) \ .$$

b) Montrer que si x_0 est un point périodique attractif de f de période q, alors, pour tout $i \in \{1, \ldots, q-1\}$, $f^i(x_0)$ est un point périodique attractif de période q dont l'orbite est celle de x_0.

Pour tout réel c, on définit une application

$$f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{par} \qquad f_c(x) = x^2 + c \ .$$

Le but du problème est de montrer que chaque application f_c a au plus une orbite attractive.
On notera de façon cohérente $(f_c)^n = f_c^n$.

PARTIE I

1) **a)** Montrer que si $c > \dfrac{1}{4}$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n \to +\infty} f_c^n(x) = +\infty.$$

Quels sont les points périodiques de f_c ?

b) Montrer que si $c = \dfrac{1}{4}$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |x| > \frac{1}{2} \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} f_c^n(x) = +\infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \leqslant \frac{1}{2} \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} f_c^n(x) = \frac{1}{2}\ .$$

Quels sont les points périodiques de f_c ? Quelles sont les orbites de ces points ?

2) **a)** Montrer que si $c < \frac{1}{4}$, f_c a deux points fixes α et β, vérifiant :

$$-\beta < \alpha < \beta$$

et que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |x| > \beta \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} f_c^n(x) = +\infty\,.$$

b) Tracer le graphe de f_{-1}.

3) **a)** Pour quelles valeurs de c a-t-on l'inclusion :

$$f_c([-\beta, \beta]) \subset [-\beta, \beta]\,.$$

Montrer que si cette inclusion n'est pas vérifiée, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} f_c^n(0) = +\infty\,.$$

b) Pour quelles valeurs de c, le point α est-il un point fixe périodique attractif ?

c) On suppose dans cette question que $c \in \left[0, \frac{1}{4}\right[$. Montrer que

$$\forall x \in]-\beta, \beta[,\ \lim_{n \to +\infty} f_c^n(x) = \alpha\ .$$

Quels sont les points périodiques de f_c ? Lesquels d'entre eux sont attractifs ? Quelles sont les orbites périodiques attractives ?

PARTIE II

Nous supposons dans cette partie que x_0 est un point périodique attractif de période q d'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et nous posons :

$$g = f^q\ .$$

1) **a)** Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[,\ \lim_{n \to +\infty} g^n(x) = x_0\ .$$

b) En déduire que l'ensemble

$$U_{x_0} = \left\{x \in \mathbb{R},\ \lim_{n \to +\infty} g^n(x) = x_0\right\}$$

est ouvert.

Dans la suite de la partie II, on notera I_{x_0} la réunion des intervalles contenant x_0 et contenus dans U_{x_0}.

2) Montrer que I_{x_0} est un intervalle ouvert.

Dans toute la suite de la partie II, on supposera que l'intervalle I_{x_0} est borné et on notera $I_{x_0} =]a, b[$.

3) Montrer les inclusions :

$$g(\,]a, b[\,) \subset\ ]a, b[\quad \text{et} \quad g(\{a, b\}) \subset \{a, b\}\,.$$

4) On suppose de plus que g' ne s'annule pas sur $]a, b[$.

a) Montrer que la dérivée de $h = g \circ g$ ne s'annule pas sur $]a, b[$ et que $h(a) = a$ et $h(b) = b$.

b) En déduire qu'il existe $a' \in]a, x_0[$ et $b' \in]x_0, b[$ tels que

$$h'(a') = h'(b') = 1\ .$$

PARTIE III

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^3 vérifiant la condition :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) \neq 0 \Longrightarrow 2\, f'''(x) f'(x) - 3\, f''(x)^2 < 0\ ,$$

et on appellera point critique de f un point x tel que $f'(x) = 0$.

1) Montrer que chacune des applications suivantes appartient à $\mathcal{E}$ et déterminer dans chaque cas l'ensemble des points critiques.

$$f : x \to \sin x$$
$$f : x \to \mathrm{e}^{\lambda x}\,,\ \ \lambda \in \mathbb{R}\ .$$
$$f : x \to x^2 + c\,,\ \ c \in \mathbb{R}\ .$$

2) Montrer que si f et g appartiennent à $\mathcal{E}$, il en est de même de $f \circ g$. En déduire que si $f \in \mathcal{E}$ et $n \geqslant 1$, alors $f^n \in \mathcal{E}$.

3) **a)** Soit $f \in \mathcal{E}$. Montrer que si l'application $x \to |f'(x)|$ a un minimum local en un point x_1, alors $f'(x_1) = 0$.

b) En déduire que si la dérivée de $f \in \mathcal{E}$ ne s'annule pas sur un intervalle $]a, b[$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| > \inf\bigl(|f'(a)|, |f'(b)|\bigr)\ .$$

4) Montrer que si $f \in \mathcal{E}$ a un point périodique attractif x_0 de période q, alors l'une des trois assertions suivantes est satisfaite :

- $\forall x \in]-\infty, x_0],\ \lim\limits_{n \to +\infty} f^{qn}(x) = x_0$,
- $\forall x \in [x_0, +\infty[,\ \lim\limits_{n \to +\infty} f^{qn}(x) = x_0$,
- Il existe un point critique y et un point x de l'orbite de x_0, tels que :

$$\lim_{n \to +\infty} f^{qn}(y) = x\ .$$

PARTIE IV

1) On suppose $c \in [-2, 0[$. Montrer que si x_0 et x_1 sont deux points périodiques attractifs de f_c, ils ont même orbite.

2) On suppose $c < -2$. Montrer que f_c n'a pas de point périodique attractif.

3) Plus généralement, montrer que si P est un polynôme de degré $d \geqslant 2$ tel que les racines de P' sont toutes réelles, l'application $x \to P(x)$ a au plus $d - 1$ orbites attractives (on commencera par exprimer la fraction rationnelle $\dfrac{P''}{P'}$ en fonction des racines de P').

FIN