Agrégation interne, 2007-2008.

Autour des séries

Rayon de convergence d'une série entière.

Quand on vous demande de calculer le rayon de convergence R d'une série entière $\sum a_n x^n$ ($x \in \mathbb{R}$ ou $x \in \mathbb{C}$), vous devez faire appel à la formule d'Hadamard:

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n \to +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}} ,$$

ou bien au critère de Cauchy:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n \to +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$$

quand cette dernière limite existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (remarquez que la formule d'Hadamard est une généralisation de ce critère car la limite supérieure existe toujours), ou encore au critère de d'Alembert:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

quand ces limites existent dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.
Une remarque qui est toujours valable et parfois utile: si la série entière $\sum a_n x^n$ converge pour un certain $x \in \mathbb{C}$, alors $R \geq |x|$.

Comportement sur le bord du disque de convergence.

Pour ce qui est de l'étude de la convergence sur le bord $\{x : |x| = R\}$ du disque (ou de l'intervalle) de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$, vous devez savoir que tous les cas sont possibles:

- la série peut ne converger en aucun point du bord (penser à $\sum x^n$),
- elle peut aussi converger en tout point du bord (penser à $\sum \frac{x^n}{n^2}$),
- elle peut aussi ne converger qu'en certains points du bord.
  Par exemple si $(a_n)_n$ est une suite décroissante à limite nulle et telle que $\sum a_n$ diverge, alors $\sum a_n x^n$ converge pour tout point du cercle unité sauf $x = 1$ (voir la transformation d'Abel ci-dessous).
  Mais la situation peut être plus compliquée: par exemple pour la série $\sum a_n x^n$ telle que $a_n = \frac{1}{p}$ si $n = 3^p$ $(p > 1)$, $a_n = -\frac{1}{p}$ si $n = 2 \times 3^p$ $(p > 1)$ et $a_n = 0$ sinon, il y a convergence sur un sous-ensemble du cercle unité qui est dense et à complémentaire dense.

Pour l'une des valeurs $x = \pm R$, on fait souvent appel au théorème des séries alternées (quand il est applicable) pour prouver la convergence.

Si on définit $f(x) := \sum a_n x^n$ sur le disque ouvert de convergence, et si la série converge pour un point z du bord du disque de convergence, alors f se prolonge par continuité sur le segment $[0, z]$ à $f(z) = \sum a_n z^n$.
Attention: f peut avoir une limite en z sans que la série $\sum a_n z^n$ ne converge (penser à $\sum x^n$ en $z = -1$).

Séries alternées et transformation d'Abel.

Le théorème des séries alternées s'énonce ainsi:

Théorème des séries alternées.
Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs qui décroit vers 0 quand $n \to +\infty$.
Alors la série alternée $\sum(-1)^n v_n$ converge. De plus, le reste

$$R_n := \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k v_k$$

est du signe de $(-1)^{n+1}$, et on a $|R_n| \leq v_{n+1}$.

Lorsque vous appliquez ce théorème, vous devez donc vérifier que $(v_n)_{n\geq 0}$ est *décroissante* ET *tend vers* 0. Remarquez que cette dernière condition est nécessaire car si la série converge, son terme général tend vers $0\ldots$
En fait ce théorème peut être obtenu comme cas particulier de la tranformation d'Abel, qui consiste à mener le calcul suivant:

$$\begin{aligned}\sum_{i=p}^{r}(u_i - u_{i-1})v_i &= \sum_{i=p}^{r} u_i v_i - \sum_{i=p}^{r} u_{i-1} v_i = \sum_{i=p}^{r} u_i v_i - \sum_{i=p-1}^{r-1} u_i v_{i+1} \\ &= u_r v_r - u_{p-1} v_p - \sum_{i=p}^{r-1} u_i (v_{i+1} - v_i)\end{aligned}$$

Cette transformation est souvent considérée comme une version discrète de la formule d'intégration par parties

$$\int_p^r u'(x)v(x)dx = u(r)v(r) - u(p)v(p) - \int_p^r u(x)v'(x)dx$$

où la somme $\sum$ remplace l'intégrale $\int$, et la "différence finie" $u_{i+1} - u_i$ remplace la dérivation $u'(x)$. Ceci explique que cette transformation soit importante dans l'étude des séries.
Remarque: il n'est pas question d'apprendre la formule de la transformation d'Abel par coeur, il faut juste connaître cette

transformation (le petit calcul qui y conduit) pour pouvoir l'appliquer au moment opportun.

Une des applications classiques de la transformation d'Abel est la suivante: si on suppose que la suite des sommes partielles $(\sum_{i=0}^{n} u_i)_{n\geq 0}$ est bornée et que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et tend vers 0, alors la série $\sum u_n v_n$ converge. Evidemment le théorème des séries alternées est un cas particulier de ce dernier résultat puisque $u_i = (-1)^i$, donc la suite des sommes partielles $(\sum_{i=0}^{n} u_i)_{n\geq 0}$, qui ne prend que les valeurs 0 et 1, est bornée, et la suite $(v_n)_n$ est décroissante et tend vers 0.

Voyons d'ailleurs comment fonctionne la preuve utilisant la transformation d'Abel dans ce cas précis:

> *Démonstration du Théorème des séries alternées.* On définit la suite $U_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$, on remarque que pour tout entier $n \geq 1$ on a $u_n = U_n - U_{n-1}$, donc en appliquant la transformation d'Abel aux suites $(U_n)_n$ et $(v_n)_n$, on obtient pour $r > p \geq 1$:
>
> $$\sum_{i=p}^{r} u_i v_i \;=\; \sum_{i=p}^{r} (U_i - U_{i-1}) v_i \;=\; U_r v_r - U_{p-1} v_p - \sum_{i=p}^{r-1} U_i (v_{i+1} - v_i).$$
>
> Or comme on l'a vu, U_n prend pour seules valeurs les nombres 0 et 1, par conséquent on a $|U_n| \leq 1$ pour tout entier $n \geq 0$ donc
>
> $$\left| \sum_{i=p}^{r} u_i v_i \right| \;\leq\; |v_r| + |v_p| + \sum_{i=p}^{r-1} |v_{i+1} - v_i|.$$
>
> Puisque la suite $(v_n)_n$ est décroissante, on a $|v_{i+1} - v_i| = v_i - v_{i+1}$ pour tout i, et comme elle tend vers 0 elle est positive, donc
>
> $$\left| \sum_{i=p}^{r} u_i v_i \right| \;\leq\; |v_r| + |v_p| + \sum_{i=p}^{r-1} (v_i - v_{i+1}) \;=\; v_r + v_p + (v_p - v_r) \;=\; 2v_p.$$
>
> On en déduit que la suite des sommes partielles $S_n := \sum_{i=0}^{n} u_i v_i$ est une suite de Cauchy et donc converge: en effet, d'après ce qui précède on a
>
> $$\forall r > p \geq 1, \qquad |S_r - S_{p-1}| \;=\; \left| \sum_{i=p}^{r} u_i v_i \right| \;\leq\; 2v_p,$$

donc si $\varepsilon > 0$ est fixé, puisque $(v_n)_n$ décroît vers 0 il existe un rang $P \geq 1$ tel que $v_p < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $p \geq P$, et donc

$$\forall r > p \geq P, \qquad |S_r - S_{p-1}| \ < \ \varepsilon.$$

La preuve ci-dessus est en fait assez représentative des techniques de preuve utilisant la transformation d'Abel, à titre d'exercice, je vous propose de démontrer les résultats suivants:

- si on suppose que la suite des sommes partielles $(\sum_{i=0}^{n} u_i)_{n\geq 0}$ est bornée et que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et tend vers 0, alors la série $\sum u_n v_n$ converge;
- si on suppose que la suite des sommes partielles $(\sum_{i=0}^{n} u_i)_{n\geq 0}$ est bornée, que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ tend vers 0 et que la série $\sum |v_{n+1} - v_n|$ converge, alors la série $\sum u_n v_n$ converge;
- si on suppose que la suite des sommes partielles $(\sum_{i=0}^{n} u_i)_{n\geq 0}$ est convergente et que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et à valeurs positives, alors la série $\sum u_n v_n$ converge.

Remarquez que le théorème des séries alternées est un cas particulier des deux premiers énoncés, mais pas du troisième.