

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIERE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 1999

MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE ÉPREUVE

FILIERE MP

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'emploi de la calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition du concours E.N.T.P.E. .

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES I - MP.

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP, comporte 4 pages.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Soit I le segment $[0, 1]$; une fonction réelle f , définie sur l'intervalle I , est continue par morceaux s'il existe une subdivision finie de I : $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1$, telle que la restriction de la fonction f à chacun des intervalles ouverts $]x_{i-1}, x_i[$, $1 \leq i \leq n$, est continue et se prolonge en une fonction continue sur l'intervalle fermé $[x_{i-1}, x_i]$. Il est admis qu'une fonction f continue par morceaux sur I est bornée. La borne supérieure des valeurs prises par la fonction $|f|$ est désignée par $\|f\|$, ($\|f\| = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$).

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues par morceaux sur I . Il est admis que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé.

Les suites considérées dans ce problème sont des suites de nombres réels indexés par des entiers strictement positifs : $A = (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Suite équi-répartie dans I : une suite $A = (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de réels a_n , $n \in \mathbb{N}^*$, appartenant à l'intervalle I , ($0 \leq a_n \leq 1$) est équi-répartie dans I , si et seulement si, pour toute fonction f de E , la suite des moyennes arithmétiques des valeurs prises par la fonction f aux N points a_n , $1 \leq n \leq N$, est convergente et de limite l'intégrale de la fonction f étendue à l'intervalle I :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(a_n) = \int_0^1 f(x) dx .$$

Suite équi-répartie modulo I : étant donnée une suite de réels $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$; soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, la suite des réels définis par la relation : pour tout entier n strictement positif $a_n = r_n - [r_n]$,

où $[r_n]$ est la partie entière du réel r_n ($[r_n]$ est un entier tel que $[r_n] \leq r_n < [r_n] + 1$). La suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est équi-répartie modulo I , si et seulement si la suite des réels $a_n, n \in \mathbb{N}^*$, est équi-répartie dans I .

1°) Un critère d'équi-répartition :

Soit $A = (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels $a_n, n \in \mathbb{N}^*$, appartenant à l'intervalle I . Soit F_A le sous-ensemble des fonctions de l'espace E pour lesquelles la relation ci-dessous a lieu :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(a_n) = \int_0^1 f(x) dx .$$

- a. Démontrer que le sous-ensemble F_A de E est un sous-espace vectoriel de E et que toutes les fonctions constantes de E appartiennent au sous-espace vectoriel F_A .
- b. Soit g une fonction de l'espace E telle que, pour tout ε positif donné, il existe deux fonctions f_1 et f_2 appartenant au sous-espace vectoriel F_A telles que la fonction g soit comprise entre f_1 et f_2 et l'intégrale de la fonction g étendue à I soit comprise à ε près entre les intégrales des fonctions f_2 et f_1 :
 - pour tout réel x de I , $f_1(x) \leq g(x) \leq f_2(x)$,
 - $\int_0^1 f_2(x) dx - \varepsilon \leq \int_0^1 g(x) dx \leq \int_0^1 f_1(x) dx + \varepsilon$.Démontrer que la fonction g appartient au sous-espace vectoriel F_A .
- c. Démontrer que, pour que la suite A soit équi-répartie dans I , il suffit que le sous-espace vectoriel F_A contienne une partie P de E dense dans E .

2°) Une condition nécessaire et suffisante d'équi-répartition :

Soit $A = (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels $a_n, n \in \mathbb{N}^*$, appartenant à l'intervalle $I = [0, 1]$.

Soit J un intervalle, contenu dans l'intervalle I , d'extrémités c et d ; soit h_J la fonction égale à 1 sur l'intervalle J et à 0 sur le complémentaire de J dans I :

$$h_J(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ appartient à } J \text{ contenu dans } I, \\ 0, & \text{si } x \text{ appartient à } I \text{ sans appartenir à } J. \end{cases}$$

- a. Démontrer que, pour que la suite A soit équi-répartie dans I , il suffit que, pour tout intervalle J de I , la fonction h_J appartienne au sous-espace F_A de E .
- b. Soit J un intervalle dont les extrémités c et d vérifient les inégalités : $0 < c < d < 1$. Étant donné un réel positif ε donné, ($\varepsilon > 0$), déterminer, deux fonctions continues f_1 et f_2 vérifiant les relations :
 - $f_1(0) = f_1(1)$, $f_2(0) = f_2(1)$, pour tout réel x de I , $f_1(x) \leq h_J(x) \leq f_2(x)$,

$$\bullet \int_0^1 f_2(x) dx - \varepsilon \leq \int_0^1 h_J(x) dx \leq \int_0^1 f_1(x) dx + \varepsilon .$$

La construction claire des graphes des deux fonctions f_1 et f_2 tient lieu de réponse.

Il est admis que la conclusion précédente est valable pour tout intervalle J , contenu dans l'intervalle I , sans que la condition $0 < c < d < 1$ sur ses extrémités soit réalisée.

En déduire : pour que la suite $A = (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ soit équi-répartie dans I , il suffit que toutes les fonctions continues prenant mêmes valeurs aux extrémités 0 et 1 de l'intervalle I appartiennent au sous-espace vectoriel F_A de E .

- c. Étant donné un entier N ($N > 0$), soit $N(J)$ le nombre de termes a_n de la suite A qui appartiennent à l'intervalle J et dont les indices n sont inférieurs ou égaux à N ; démontrer que, pour que la suite A soit équi-répartie dans I , il faut et il suffit que, pour tout intervalle J , la suite des réels $\frac{N(J)}{N}$, $N \in \mathbb{N}^*$, soit convergente et de limite $d-c$, lorsque l'entier N croît vers l'infini : $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(J)}{N} = d - c$.

3°) Un critère d'équi-répartition modulo I ; théorème de Bohl :

Étant donné une suite de réels $R = (r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et deux entiers naturels k et N strictement positifs, soit $C(R, k, N)$ le nombre complexe défini par la relation suivante :

$$C(R, k, N) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \exp(2 i \pi k r_n) .$$

- a. Démontrer que, si la suite $R = (r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est équi-répartie modulo I , pour tout entier k strictement positif, la limite de l'expression $C(R, k, N)$, lorsque l'entier N croît indéfiniment, est nulle : $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \exp(2 i \pi k r_n) = 0$.
- b. Démontrer réciproquement, qu'une suite de réels $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est équi-répartie modulo I , si, pour tout entier k strictement positif, la limite, lorsque l'entier N croît vers l'infini, de l'expression $C(R, k, N)$ est nulle.
- c. Exemple : soit θ un réel donné. Démontrer que la suite des réels $n\theta$, $n \in \mathbb{N}^*$, est équi-répartie modulo I si et seulement si le réel θ est irrationnel.

Dans les questions suivantes le résultat classique de Cesaro est admis et peut être utilisé : si une suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et de limite l , la suite de terme général

$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n$, $N \in \mathbb{N}^*$, est convergente et de limite l .

4°) Exemples de suites équi-réparties modulo 1 :

Dans cette question la suite $R = (r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ considérée est définie à partir d'une fonction φ réelle définie sur la demi-droite fermée $[1, \infty[$: pour tout entier n ($n \geq 1$) $r_n = \varphi(n)$. Soient r_n, A_n les nombres complexes définis par les relations suivantes :

$$d_n = r_{n+1} - r_n, \quad A_n = \exp(2i\pi r_n),$$

La fonction φ , définie sur la demi-droite $[1, \infty[$, est supposée à valeurs positives, de classe C^2 , concave ($\varphi'' \leq 0$). En outre, dans un voisinage de l'infini, sa dérivée φ' est négligeable devant 1 et la fonction $1/t$ devant $\varphi'(t)$ ($\varphi'(t) = o(1)$, $1/t = o(\varphi'(t))$).

- a. Établir que les réels d_n , $n \in \mathbb{N}^*$, sont strictement positifs et que les deux suites de réels d_n et $\frac{1}{n d_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, tendent vers 0 lorsque l'entier n croît vers l'infini.

Soient B_n les nombres complexes définis par la relation : $B_n = \frac{1}{2i\pi} \left(\frac{A_{n+1}}{d_{n+1}} - \frac{A_n}{d_n} \right)$.

Il est admis que, pour tout entier n strictement positif, l'inégalité ci-dessous a lieu :

$$|A_n - B_n| \leq \left| \frac{1}{d_{n+1}} - \frac{1}{d_n} \right| + \pi |d_n|.$$

- b. Démontrer, lorsque l'entier N croît vers l'infini, la convergence vers 0 de la suite des réels $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N A_n$, $N \in \mathbb{N}^*$: $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N A_n = 0$.
- c. Est-ce que la suite des réels $r_n = \varphi(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, est équi-répartie modulo 1 ?

5°) Suites $(\ln^\alpha(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$:

Étant donné un réel α supérieur ou égal à 1 ($\alpha \geq 1$), soient A_α la suite des réels $(\ln^\alpha(n))$, $n \in \mathbb{N}^*$ et ψ_α la fonction, définie sur la demi-droite $[1, \infty[$: $x - \ln^\alpha(x)$.

- a. Pour quelles valeurs du réel α , les résultats de la question 4 permettent d'affirmer que la suite A_α est équi-répartie ?
- b. Soit f la fonction définie sur la demi-droite $]0, \infty[$: $x - \exp(2i\pi \ln(x))$. Déterminer une primitive de cette fonction.
- c. Étant donné un entier N , strictement positif, soient L_N et I_N les deux nombres complexes définis par les relations suivantes :

$$L_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \exp(2i\pi \ln(n)) ; \quad I_N = \frac{1}{N} \int_1^N \exp(2i\pi \ln(x)) dx.$$

Déterminer les limites, lorsque l'entier N croît vers l'infini, du module $|I_N|$ de I_N et de la différence $L_N - I_N$. Est-ce que la suite A_1 , définie ci-dessus, est équirépartie modulo I ?

FIN DU PROBLÈME
FIN DE L'ÉPREUVE