

Préparation au CAPES externe 2010-2011,
Correction *succincte* du problème sur le laplacien discret.

Commentaires préliminaires.

Ce document n'est pas à proprement parler une correction, mais plutôt une série d'indications que j'espère suffisamment détaillées.

Ce sujet a été librement inventé à partir de la discrétisation du problème de Dirichlet en dimensions 1 et 2 par la méthode des différences finies, suite à une discussion avec Ludovic Rifford.

Partie I: cas de la dimension 1.

A. Approche algébrique.

A.1.a. On démontre H_N^1 est le noyau de l'application linéaire $f_N - id_N$:

$$\begin{aligned} v \in \ker(f_N - id_N) &\Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, N\} \quad f(v)_i = v_i \\ &\Leftrightarrow \forall i \in \{2, \dots, N-1\} \quad \frac{v_{i-1} + v_{i+1}}{2} = v_i \quad \Leftrightarrow \quad v \in H_N^1. \end{aligned}$$

A.1.b. La matrice F_N de f_N dans la base canonique de \mathbb{R}^N est:

$$F_N := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On a en particulier $F_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $F_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

A.1.c. On a $F_N - I_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

La famille des vecteurs lignes est liée (elle contient le vecteur nul), donc le déterminant de cette matrice est nul.

A.2.a. L'équation homogène pour cette suite arithmético-géométrique est $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$, qui admet $-\frac{1}{2}$ comme racine double. On sait que la suite x_n est alors de la forme $(-\frac{1}{2})^n(\alpha + \beta n)$, et on trouve $\alpha = \beta = 1$ par identification sur les deux premiers termes, d'où:

$$\forall n \geq 1, \quad x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (1 + n).$$

On voit facilement que $x_n \neq 0$ pour tout $n \geq 1$.

A.2.b. On remarque que $\det(G_1) = -1$, $\det(G_2) = \frac{3}{4}$. Pour $n \geq 1$, en développant le déterminant de G_{n+2} par rapport à la première ligne on obtient

$$\det(G_{n+2}) = -\det(G_{n+1}) - \frac{1}{2} \det \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & G_n & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} \right),$$

et en développant le déterminant de droite par rapport à la première colonne on obtient $\det(G_{n+2}) = -\det(G_{n+1}) - \frac{1}{4} \det(G_n)$. On en déduit que $\det(G_n) = x_n$ pour tout $n \geq 1$, et donc que $\det(G_n)$ est toujours non nul.

A.3. On remarque que $F_N - I_N = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & & & & \vdots \\ 0 & & G_{N-2} & & 0 \\ \vdots & & & & \frac{1}{2} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$: la famille des vecteurs lignes est de

rang au plus $N - 2$, et puisque la matrice extraite G_{N-2} est inversible (car de déterminant non nul) on en déduit que le rang de $F_N - I_N$ est $N - 2$.

Le théorème du rang indique que la dimension du noyau H_N^1 de $f_N - id_N$ est $N - (N - 2) = 2$.

A.4.a. Soit $v \in \mathbb{R}^N$, pour $i \in \{1, \dots, N\}$ on note M_i le point de coordonnées $(x_i, y_i) = (i, v_i)$.

Si v est harmonique, alors pour tout $i \in \{2, \dots, N - 1\}$ le point M_i est le milieu du segment $[M_{i-1}, M_{i+1}]$ et donc les points M_{i-1} , M_i et M_{i+1} sont alignés. Comme les points de V sont distincts deux à deux, on en déduit que les points M_1, \dots, M_N sont alignés.

Réciproquement, supposons que les points M_1, \dots, M_N sont alignés. Soit alors $i \in \{2, \dots, N - 1\}$, les points M_{i-1} , M_i et M_{i+1} sont alignés, et comme $x_i = i = \frac{i-1+i+1}{2} = \frac{x_{i-1}+x_{i+1}}{2}$ on en déduit que $y_i = \frac{y_{i-1}+y_{i+1}}{2}$ et donc $v_i = \frac{v_{i-1}+v_{i+1}}{2}$. Ceci étant valable pour tout $i \in \{2, \dots, N - 1\}$, le vecteur v est harmonique.

A.4.b. Soit v harmonique tel que $v_1 = v_N = 0$. Dans ce cas $M_1 = (0, 0)$ et $M_N = (0, 0)$, la droite qui passe par ces points est la droite $\mathbb{R} \times \{0\}$, donc $M_i = (i, 0)$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$.

Le seul vecteur harmonique v tel que $v_1 = v_N = 0$ est donc le vecteur nul.

A.4.c. De la même manière, l'unique vecteur harmonique $v \in \mathbb{R}^N$ pour lequel $v_1 = \alpha$ et $v_N = \beta$ est tel que

$$\forall i \in \{1, \dots, N\} \quad v_i = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{N - 1}(i - 1).$$

A.4.d. Le sev H_N^1 est de dimension 2, une base de H_N^1 est donc une famille libre à deux éléments de H_N^1 . On peut par exemple prendre la famille (v^1, v^2) où v^1 et v^2 sont définis par

$$\forall i \in \{1, \dots, N\} \quad v_i^1 = 0 + \frac{1 - 0}{N - 1}(i - 1) = \frac{i - 1}{N - 1}.$$

et

$$\forall i \in \{1, \dots, N\} \quad v_i^2 = 1 + \frac{0 - 1}{N - 1}(i - 1) = \frac{N - i}{N - 1}.$$

B. Approche probabiliste.

B.1. Le résultat (R1) affirme que le marcheur partant de la position j sortira "presque sûrement" (i.e. avec une probabilité 1) de l'intervalle $[\min(k, l), \max(k, l)]$, soit en passant par k soit en passant par l : il a une probabilité nulle de rester dans l'intervalle $[\min(k, l) + 1, \max(k, l) - 1]$.

B.2. On remarque que $C_S(j, j-1, j+1) = \{X_1^S = -1\}$ et $C_S(j, j+1, j-1) = \{X_1^S = 1\}$ car le fait de passer d'abord par $j-1$ ou $j+1$ en partant de j se décide dès le premier pas, donc

$$P(C_S(j, j-1, j+1)) = P(C_S(j, j+1, j-1)) = P(X_1^S = -1) = P(X_1^S = 1) = \frac{1}{2}.$$

B.3.a. On définit la suite de variables aléatoires $(Y_i^\sigma)_{i \geq 1}$ sur (Ω, P) par

$$\forall i \geq 1 \quad Y_i^\sigma := X_{i+1}^S.$$

Ces v.a. sont toutes définies sur le même espace probabilisé, sont deux à deux indépendantes, de même loi

$$\forall i \geq 1 \quad P(Y_i^\sigma = -1) = P(Y_i^\sigma = 1) = \frac{1}{2}$$

et on a

$$\forall j \in \mathbb{Z} \quad \forall n \geq 1 \quad \sigma_n^j := j + \sum_{i=1}^n Y_i^\sigma.$$

Donc $(\sigma_n^j)_{j \in \mathbb{Z}, n \geq 1}$ est une marche aléatoire sur \mathbb{Z} .

B.3.b. On écrit

$$\begin{aligned} P(C_S(j, j-1, l)) &= P(C_S(j, j-1, l) | X_1^S = -1) \times P(X_1^S = -1) \\ &\quad + P(C_S(j, j-1, l) | X_1^S = 1) \times P(X_1^S = 1) \\ &= \frac{1}{2} P(C_S(j, j-1, l) | X_1^S = -1) + \frac{1}{2} P(C_S(j, j-1, l) | X_1^S = 1) \\ &= \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} P(C_\sigma(j+1, j-1, l)) \end{aligned}$$

car si l'évènement $X_1^S = -1$ se produit alors il en est de même de l'évènement $C_S(j, j-1, l)$ (d'où $P(C_S(j, j-1, l) | X_1^S = -1) = 1$), et lorsque $X_1^S = 1$ alors le marcheur suit la marche $(\sigma_n^j)_{j \in \mathbb{Z}, n \geq 1}$ en partant de la position $j+1$ (d'où $P(C_S(j, j-1, l) | X_1^S = 1) = P(C_\sigma(j+1, j-1, l))$).

En appliquant (R2) on obtient donc

$$P(C_S(j, j-1, l)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} P(C_S(j+1, j-1, l)).$$

B.3.c. En raisonnant comme précédemment on obtient

$$\begin{aligned} P(C_S(j, k, l)) &= P(C_S(j, k, l) | X_1^S = -1) \times P(X_1^S = -1) + P(C_S(j, k, l) | X_1^S = 1) \times P(X_1^S = 1) \\ &= \frac{1}{2} P(C_\sigma(j, k-1, l)) + \frac{1}{2} P(C_\sigma(j, k+1, l)) \\ &= \frac{1}{2} P(C_S(j, k-1, l)) + \frac{1}{2} P(C_S(j, k+1, l)). \end{aligned}$$

B.4.a. La v.a. Y_2 suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

B.4.b. On remarque que pour tout $j \in \{2, \dots, N-1\}$ on a

$$\mathbb{E}(Y_j) = 1 \times P(C_S(j, N, 1)) = P(C_S(j, N, 1)) = 1 - P(C_S(j, 1, N)).$$

Pour $j = 2$, on utilise B.3.b. pour obtenir $\mathbb{E}(Y_2) = \frac{\mathbb{E}(Y_1) + \mathbb{E}(Y_3)}{2}$ (remarque: $\mathbb{E}(Y_1) = 0$).

Pour $j \in \{3, \dots, N-2\}$, on utilise B.3.c. pour obtenir $\mathbb{E}(Y_j) = \frac{\mathbb{E}(Y_{j-1}) + \mathbb{E}(Y_{j+1})}{2}$.

Pour $j = N-1$, on utilise un raisonnement analogue à celui de B.3.b. pour obtenir que

$$P(C_S(N-1, N, 1)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} P(C_S(N-2, N, 1))$$

et conclure que $\mathbb{E}(Y_{N-1}) = \frac{\mathbb{E}(Y_{N-2}) + \mathbb{E}(Y_N)}{2}$ (remarque: $\mathbb{E}(Y_N) = 1$).

B.5.a. Pour $i \in \{2, \dots, N-1\}$ on a

$$\begin{aligned} v_i &= \mathbb{E}(Z_i) = \mathbb{E}(\alpha + (\beta - \alpha)Y_i) = \alpha + (\beta - \alpha)\mathbb{E}(Y_i) \\ &= \alpha + (\beta - \alpha)\frac{\mathbb{E}(Y_{i-1}) + \mathbb{E}(Y_{i+1})}{2} \\ &= \frac{\alpha + (\beta - \alpha)\mathbb{E}(Y)_{i-1} + \alpha + (\beta - \alpha)\mathbb{E}(Y)_{i+1}}{2} = \frac{\mathbb{E}(Z)_{i-1} + \mathbb{E}(Z)_{i+1}}{2} = \frac{v_{i-1} + v_{i+1}}{2} \end{aligned}$$

et donc v est harmonique.

B.5.b. Puisque v est harmonique, $v_1 = \alpha$ et $v_N = \beta$, on obtient par identification dans la formule A.4.c. que

$$\forall i \in \{2, \dots, N-1\} \quad \mathbb{E}(Y_i) = \frac{i-1}{N-1}$$

et donc

$$\forall i \in \{2, \dots, N-1\} \quad P(C_S(i, 1, N)) = 1 - \mathbb{E}(Y_i) = \frac{N-i}{N-1}.$$

Partie II: cas de la dimension 2.

A. Approche algébrique.

A.0. On vérifie que

$$a_{2,2} = 1 = \frac{a_{1,2} + a_{2,3} + a_{3,2} + a_{2,1}}{4} \quad \text{et} \quad a_{2,3} = 2 = \frac{a_{1,3} + a_{2,4} + a_{3,3} + a_{2,2}}{4}$$

donc A est harmonique.

Comme $b_{2,2} = 2 \neq \frac{5}{4} = \frac{b_{1,2} + b_{2,3} + b_{3,2} + b_{2,1}}{4}$, B n'est pas harmonique.

On vérifie que

$$c_{2,2} = 1 = \frac{c_{1,2} + c_{2,3} + c_{3,2} + c_{2,1}}{4} \quad \text{et} \quad c_{2,3} = 1 = \frac{c_{1,3} + c_{2,4} + c_{3,3} + c_{2,2}}{4}$$

donc C est harmonique.

A.1.a. Puisque A est harmonique, on sait que

$$a_{i,j} = \frac{a_{i-1,j} + a_{i+1,j} + a_{i,j-1} + a_{i,j+1}}{4}$$

Si $a_{i,j} = \max\{a_{i-1,j}, a_{i+1,j}, a_{i,j-1}, a_{i,j+1}\}$ alors

$$a_{i,j} = \frac{a_{i-1,j} + a_{i+1,j} + a_{i,j-1} + a_{i,j+1}}{4} \leq \frac{4 \times \max\{a_{i-1,j}, a_{i+1,j}, a_{i,j-1}, a_{i,j+1}\}}{4} = a_{i,j}$$

et donc $a_{i,j} = a_{i-1,j} = a_{i+1,j} = a_{i,j-1} = a_{i,j+1}$. Ceci est donc une condition nécessaire, qui est évidemment suffisante.

A.1.b. *Question dure !*

On raisonne par l'absurde: on pose $\alpha := \max\{a_{i,j} : (i,j) \in I\}$ et on suppose que

$\alpha > \max\{a_{i,j} : (i,j) \in J \setminus I\}$. On remarque que cela implique que $\alpha = \max\{a_{i,j} : (i,j) \in J\}$

On définit

$$k := \min\{i : \exists (i,j) \in I \quad a_{i,j} = \alpha\}$$

et on choisit $l \in \{2, \dots, N-1\}$ tel que $a_{k,l} = \alpha$.

On démontre d'abord par l'absurde que $k = 2$. Si on suppose $k > 2$, on déduit de la question précédente et du fait que $\alpha = \max\{a_{i,j} : (i,j) \in J\}$ que

$$a_{k,l} = a_{k-1,l} = a_{k,l+1} = a_{k+1,l} = a_{k,l-1}.$$

Or puisque $k > 2$ on remarque que $(k-1, l)$ appartient à I , et comme $a_{k-1, l} = \alpha$ on obtient une contradiction avec la définition de k . On a donc prouvé que $k = 2$.

On applique à nouveau le fait que $\alpha = \max \{a_{i,j} : (i,j) \in J\}$, et on obtient de même que

$$a_{2,l} = a_{1,l} = a_{2,l+1} = a_{3,l} = a_{2,l-1}.$$

Or $(1, l)$ appartient à $J \setminus I$, et donc

$$\alpha \leq \max \{a_{i,j} : (i,j) \in J \setminus I\}$$

en contradiction avec l'hypothèse de départ, ce qui conclut la preuve.

A.1.c. On pose $B = -A$. Puisque B est harmonique, en lui appliquant le résultat de A.1.b. on obtient

$$\min \{a_{i,j} : (i,j) \in I\} \geq \min \{a_{i,j} : (i,j) \in J \setminus I\}.$$

A.1.d. Si $a_{i,j} = 0$ pour tout $(i,j) \in J \setminus I$ alors

$$\min \{a_{i,j} : (i,j) \in J \setminus I\} = \max \{a_{i,j} : (i,j) \in J \setminus I\} = 0$$

D'après les deux questions précédentes on obtient alors que

$$0 \leq \min \{a_{i,j} : (i,j) \in I\} \leq \max \{a_{i,j} : (i,j) \in I\} \leq 0$$

et donc tous les coefficients de A sont nuls.

A.2.a. Par définition de g , si A est dans son noyau alors en particulier $g(A)_{i,j} = 0$ pour tout $(i,j) \in I$, et donc

$$\forall (i,j) \in I \quad a_{i,j} = \frac{a_{i-1,j} + a_{i+1,j} + a_{i,j-1} + a_{i,j+1}}{4}.$$

Ainsi si $g(A) = 0$ alors $A \in H_{N,K}^2$.

A.2.b. Si A est dans le noyau de g , alors en particulier $g(A)_{i,j} = 0$ pour tout $(i,j) \in J \setminus I$. De plus, A est harmonique d'après la question précédente. On conclut alors de A.1.d que tous les coefficients de A sont nuls: le seul élément du noyau de g est donc la famille A dont tous les coefficients sont nuls, donc l'application linéaire g est injective.

A.2.c. L'endomorphisme $g : E \rightarrow E$ étant injectif, il est bijectif. Soit alors $(b_{i,j})_{(i,j) \in J \setminus I}$, on définit l'élément $C = (c_{i,j})_{(i,j) \in J}$ de E par

$$\begin{cases} \forall (i,j) \in J \setminus I & c_{i,j} = b_{i,j}, \\ \forall (i,j) \in I & c_{i,j} = 0. \end{cases}$$

Puisque g est bijectif, C a un unique antécédent par g , qui est l'un unique élément $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in J}$ de E harmonique et tel que

$$\forall (i,j) \in J \setminus I \quad a_{i,j} = b_{i,j}.$$

A.2.d. On déduit de la question précédente que la dimension de $H_{N,K}^2$ est $2N + 2K - 8$.

B. Approche numérique.

B.0. On obtient

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ & 2 & 1 & \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \frac{15}{16} & \frac{15}{16} & 0 \\ & 2 & 1 & \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \frac{63}{64} & \frac{63}{64} & 0 \\ & 2 & 1 & \end{bmatrix}.$$

B.1. Comme A est harmonique, on obtient directement des définitions que $h(A) = A$, donc A est un point fixe de h sur E_b .

Soit $C = (c_{i,j})_{(i,j) \in J}$ un point fixe de h sur E_b . Comme $h(C) = C$, on en déduit que C est une matrice écornée harmonique. De plus, comme C appartient à E_b on sait que $c_{i,j} = b_{i,j}$ pour tout

$(i, j) \in J \setminus I$. D'après la question A.2.c., on obtient que $C = A$. On a donc obtenu que A est l'unique point fixe de h sur E_b .

B.2.a. Soit $D \in E$. Pour alléger les notations, on note $(c_{i,j})_{(i,j) \in J} := h(D - A)$. On a alors:

$$\begin{aligned} \sup_{(i,j) \in I} |c_{i,j}| &= \max_{(i,j) \in I} \left| \frac{d_{i-1,j} - a_{i-1,j} + d_{i+1,j} - a_{i+1,j} + d_{i,j-1} - a_{i,j-1} + d_{i,j+1} - a_{i,j+1}}{4} \right| \\ &\leq \max_{(i,j) \in I} \frac{|d_{i-1,j} - a_{i-1,j}| + |d_{i+1,j} - a_{i+1,j}| + |d_{i,j-1} - a_{i,j-1}| + |d_{i,j+1} - a_{i,j+1}|}{4} \\ &\leq \max_{(i,j) \in J} |d_{i,j} - a_{i,j}| = \|D - A\|_\infty \end{aligned}$$

et comme

$$\max_{(i,j) \in J \setminus I} |c_{i,j}| = \max_{(i,j) \in J \setminus I} |d_{i,j} - a_{i,j}| \leq \|D - A\|_\infty$$

on obtient l'inégalité demandée.

B.2.b. Puisque h est linéaire et A est un point fixe de h on a

$$\forall n \geq 0 \quad \|A_{n+1} - A\|_\infty = \|h(A_n) - h(A)\|_\infty = \|h(A_n - A)\|_\infty \leq \|A_n - A\|_\infty$$

et donc la suite $(\|A_n - A\|_\infty)_n$ est décroissante.

On en déduit que

$$\forall n \geq 0 \quad \|A_n\|_\infty \leq \|A_n - A\|_\infty + \|A\|_\infty \leq \|A_0 - A\|_\infty + \|A\|_\infty =: M.$$

B.3.a. Soit $D \in E_b$ avec $D \neq A$. On sait par la question B.2.a. que $\|h(D - A)\|_\infty \leq \|D - A\|_\infty$, et on montre par l'absurde que $\|h(D - A)\|_\infty \neq \|D - A\|_\infty$. Pour alléger les notations, on note $(c_{i,j})_{(i,j) \in J} := h(D - A)$. Puisque $D \in E_b$, on a $c_{i,j} = 0$ pour tout $(i, j) \in J \setminus I$, donc

$$\|h(D - A)\|_\infty = \max\{|c_{i,j}| : (i, j) \in I\}.$$

Soit $k := \min\{i \geq 1 : \exists l, |c_{i,j}| = \|h(D - A)\|_\infty\}$ et soit l tel que $c_{k,l} = \|h(D - A)\|_\infty$. Comme $D \neq A$ et $c_{1,j} = 0$ pour tout $j \in \{2, \dots, N-1\}$ on a nécessairement $k \neq 1$ et donc $k \geq 2$. De même, l appartient forcément à $\{2, \dots, N-1\}$. Alors si $\|h(D - A)\|_\infty = \|D - A\|_\infty$ on a :

$$\begin{aligned} \|D - A\|_\infty &= \|h(D - A)\|_\infty = |c_{k,l}| \\ &= \left| \frac{d_{k-1,l} - a_{k-1,l} + d_{k+1,l} - a_{k+1,l} + d_{k,l-1} - a_{k,l-1} + d_{k,l+1} - a_{k,l+1}}{4} \right| \\ &\leq \frac{|d_{k-1,l} - a_{k-1,l}| + |d_{k+1,l} - a_{k+1,l}| + |d_{k,l-1} - a_{k,l-1}| + |d_{k,l+1} - a_{k,l+1}|}{4} \\ &\leq \max_{(i,j) \in J} |d_{i,j} - a_{i,j}| = \|D - A\|_\infty \end{aligned}$$

et donc les inégalités sont des égalités. En particulier

$$|c_{k-1,l}| = |d_{k-1,l} - a_{k-1,l}| = \|h(D - A)\|_\infty$$

ce qui contredit la définition de k , et termine la preuve.

B.3.b. Soit $\alpha \in]0, M]$, alors l'application $D \mapsto \frac{\|h(D-A)\|_\infty}{\|D-A\|_\infty}$ est bien définie et continue sur le compact $\{D \in E_B : \|D - A\|_\infty \in [\alpha, M]\}$ (il faut remarquer que cet ensemble est fermé et borné dans E , qui est de dimension finie), donc elle atteint son maximum β en un élément D' de ce compact. Comme $\alpha > 0$ on a $D' \neq A$, et d'après la question précédente, on a nécessairement

$$\beta = \frac{\|h(D' - A)\|_\infty}{\|D' - A\|_\infty} < 1.$$

B.3.c. La suite $(\|A_n - A\|_\infty)_n$ est positive et décroissante, donc elle a une limite positive.

On démontre par l'absurde que cette limite est nulle. Supposons que cette limite soit $\alpha > 0$, alors en appliquant le résultat de la question précédente on obtient qu'il existe $\beta \in]0, 1[$ tel que

$$\forall D \in E_B \quad \|D - A\|_\infty \in [\alpha, M] \Rightarrow \|h(D - A)\|_\infty \leq \beta \|D - A\|_\infty.$$

Puisque $A_n \in E_B$ et $\|A_n - A\|_\infty \in [\alpha, M]$ pour tout $n \geq 0$, on a donc

$$\forall n \geq 0 \quad \|A_{n+1} - A\|_\infty \leq \beta \|A_n - A\|_\infty \leq \dots \leq \beta^{n+1} \|A_0 - A\|_\infty.$$

Comme $0 < \beta < 1$, on en déduit que $(\|A_n - A\|_\infty)_n$ tend vers 0, ce qui contredit l'hypothèse de départ, et achève la démonstration.

FIN.