Agrégation interne, 2006-2007.
Sujet 4.

Indications.

I-1. Penser à la formule de Taylor avec reste intégral.

I-2. Penser à vérifier que x appartient à I.

I-3. Il faut encore penser à vérifier que $\displaystyle\int_a^b g(x)f(x)dx$ appartient à I.
Pour pouvoir utiliser I-2, on peut découper l'intégrale en n intégrales sur des intervalles de longueur $\frac{1}{n}$, choisir pour les coefficients a_i la moyenne de f sur l'intervalle correspondant, et pour x_i la valeur de g en un point de cet intervalle...

II-1. On peut utiliser I-1.

II-2. On peut utiliser I-2. (penser à préciser le cas $x = 0$).

II-3.b. Penser à vérifier que $(p_1 + p_2, p_3, \ldots, p_n)$ appartient à $\mathcal{A}_n$.

II-4.a. Ne pas oublier que $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$. La première inégalité est une simple utilisation de I-2.

II-4.b. Ne pas oublier que $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ appartiennent à $\mathcal{A}_n$.

II-4.c. Soit $f : t \mapsto \tilde{p}\, ln(t) + (1 - \tilde{p})\, ln(1 - t)$, on peut étudier

$$t \mapsto f(\tilde{p}) - f(t) - 2(\tilde{p} - t)^2.$$

II-5.a. On peut utiliser (P4), (P3) et (P5).

II-5.b. Penser à la question précédente.

II-5.c. Penser à (P6).

II-5.d. Première égalité: on peut utiliser intensivement (P4) et habilement la question précédente; preuve courte et presque sans calculs.

II-5.e. On peut utliser (P6) et II-3.b.

III-1. En $\pm\infty$, on peut se ramener au cas $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

III-3.a. On peut utiliser I-1.

IV-3.b. Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, on peut appliquer le I-3 à $t \mapsto t\, ln(t)$ au point $f * g(x)$

IV-4.c. Faire ce qui est dit dans l'énoncé... on pourra par exemple poser $x = 2(H(f) - H(g))$ et choisir un λ optimal compte tenu de l'inégalité qu'on cherche à obtenir.