Divers exercices d'analyse réelle et complexe

Les références utilisées sont:

[Gourdon]	Les maths en tête, Analyse, X. Gourdon (ed. ellipses)
[Halmos]	Problèmes pour mathématiciens petits et grands, P. Halmos (ed. Cassini)

1 Suites et séries

Exercice 1.1 (suite arithmético-géométrique, Gourdon p.201)
On considère deux suites de nombres réels $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ telles que

$$0 < v_0 < u_0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad et \quad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

Exercice 1.2 (une suite récurrente, Halmos p.61)
Soit $(u_n)_n$ la suite récurrente définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2}^{u_n}$. Démontrer que $(u_n)_n$ converge quand n tend vers l'infini et calculer sa limite.

Exercice 1.3
Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection. On suppose que la limite $l := \lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{n}$ existe. Démontrer que $l = 1$.

Exercice 1.4
Soit $\sum u_n$ une série à termes réels semi-convergente et $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une bijection $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\sum u_{f(n)}$ admette $[a, b]$ comme ensemble de valeurs d'adhérence.

Exercice 1.5
Soit $\alpha > 0$, on définit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ par $u_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \ldots + \sqrt{n - 1 + \alpha n}}}}$, en posant $u_1 = \sqrt{\alpha}$. Montrer que $\lim u_n$ existe et ne dépend pas de α.

2 Etudes de fonctions

Exercice 2.1 (cordes universelles, Halmos, p.63 et 71)
On appelle corde universelle un nombre $c \in [0, 1]$ tel que pour toute fonction continue $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = f(1)$ il existe un réel $x_f \in [0, 1]$ tel que $f(x_f + c) = f(x_f)$.

Montrer que l'ensemble des cordes universelles est $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$.

On appelle corde semi-universelle un nombre $c \in [0, 1]$ tel que pour toute fonction continue $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = f(1)$ il existe un réel $x_f \in [0, 1]$ tel que $f(x_f + c) = f(x_f)$ ou $f(x_f + 1 - c) = f(x_f)$.

Montrer que l'ensemble des cordes semi-universelles est $[0, 1]$.

Exercice 2.2
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\theta : \mathbb{R} \to [0, 1]$ une application telle que

$$\forall h \in \mathbb{R}^*, \qquad f'(x_0 + \theta(h)h) \;=\; \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

1. Expliciter une telle fonction θ dans le cas où f est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

2. Dans le cas général et en supposant $f''(x_0) \neq 0$, montrer que $\theta(h) \to \frac{1}{2}$ quand $h \to 0$.

Exercice 2.3
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et nulle en 0. On suppose $|f'(x)| \leq |f(x)|$ pour tout $x \in I$.

Montrer que f est identiquement nulle.

3 Séries entières

Exercice 3.1
On suppose que la série entière $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence 1. Pour tout entier n on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$. Quel est le rayon de convergence de $\sum S_n x^n$? Quelle est sa somme?

4 Intégration

Exercice 4.1 (Gourdon p. 128)
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction positive et continue sur $[a,b]$.

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b f(t)^n dt\right)^{\frac{1}{n}} = M$ où $M := \sup\{f(t) \,:\, t \in [a,b]\}$.

2. Soit $g : [a,b] \to]0,+\infty[$, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b f(t)^n g(t) dt\right)^{\frac{1}{n}} = M$.

3. Peut-on remplacer $[a,b]$ par $\mathbb{R}$ dans les questions précédentes, en supposant évidemment que les intégrales convergent (et que M est fini)?

Exercice 4.2 (Gourdon p. 129)
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. On pose $M := \sup\{|f'(t)| \,:\, t \in [a,b]\}$.

1. Montrer que $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \frac{(b-a)^2}{4} M$.

2. Dans quel cas a-t'on égalité ?

Exercice 4.3 (Inégalité de Young, Gourdon p. 133)
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et strictement croissante, nulle en 0.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = xf(x)$ pour tout $x > 0$.

2. En déduire que $\displaystyle\int_0^a f(t)dt + \int_0^b f^{-1}(t)dt \geq ab$ pour tous $a, b > 0$, avec égalité si et seulement si $b = f(a)$.