INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ETUDES ECONOMIQUES
ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE

SESSION 1997
Filière MP

PREMIERE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

Les 4 premières questions de la partie II et les 7 premières questions de la partie III sont indépendantes des précédentes.

Dans ce problème on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbf{R}^d$ (d entier naturel non nul) et $B(x,r)$ la boule euclidienne ouverte dans $\mathbf{R}^d$ de centre $x \in \mathbf{R}^d$ et de rayon $r > 0$.

PARTIE I

Soit F une partie bornée de $\mathbf{R}^d$, non vide.

I.1) Dire pourquoi, pour tout $\delta > 0$, l'ensemble d'entiers :

$$\mathcal{M}(\delta, F) = \left\{ N \in \mathbf{N}^*;\ \exists (x_1, \dots, x_N) \in (\mathbf{R}^d)^N,\ F \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \delta) \right\}$$

est non vide.

On désigne par $N(\delta, F)$ le plus petit entier N qui appartient à $\mathcal{M}(\delta, F)$. On note :

$$\text{B-dim}(F) = \lim_{\delta \to 0, \delta > 0} \frac{\ln N(\delta, F)}{-\ln \delta}$$

quand la limite écrite existe.

I.2) Soit F, F', F'' trois parties bornées de $\mathbf{R}^d$ non vides telles que B-dim(F) et B-dim(F') existent et soit un réel $\lambda \neq 0$. On pose $\lambda F = \{\lambda x; x \in F\}$. Prouver que :

I.2.a) si $F \subset F'$ alors B-dim$(F) \leq$ B-dim(F')

I.2.b) B-dim(λF) existe et B-dim$(\lambda F) =$ B-dim(F)

I.2.c) B-dim$(F \cup F')$ existe et B-dim$(F \cup F') = \max\{\text{B-dim}(F), \text{B-dim}(F')\}$

I.2.d) si $F \subset F'' \subset F'$ et B-dim$(F) =$ B-dim(F') alors B-dim(F'') existe et B-dim$(F'') =$ B-dim(F).

I.3) Calculer B-dim(F) quand F est une partie de $\mathbf{R}^d$ qui a un nombre fini d'éléments.

I.4) Soit $\{v_1, \dots, v_d\}$ une base de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^d$. Pour $\delta > 0$ et $k_1, \dots, k_d$ entiers relatifs on pose :

$$C(k_1, \dots, k_d) = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_d v_d;\ \forall i \in \{1, \dots, d\},\ \lambda_i \in [k_i\delta, k_i\delta + \delta[\}$$

et on appelle δ-cube une telle partie de $\mathbf{R}^d$. On note $\mathcal{C}_\delta(v_1, \dots, v_d)$ l'ensemble des δ-cubes. Pour F partie non vide bornée de $\mathbf{R}^d$, on note $A(\delta, F)$ le nombre de δ-cubes dont l'intersection avec F est non vide :

$$\begin{aligned} A(\delta, F) &= \text{Card}(\{C \in \mathcal{C}_\delta(v_1, \dots, v_d);\ C \cap F \neq \emptyset\}) \\ &= \text{Card}(\{(k_1, \dots, k_d);\ C(k_1, \dots, k_d, \delta) \cap F \neq \emptyset\}) \end{aligned}$$

I.4.a) Montrer que l'application de $\mathbf{R}^d$ dans $[0, +\infty[$ qui, à tout élément x de $\mathbf{R}^d$ s'écrivant $x = x_1 v_1 + \cdots x_d v_d$, associe le réel positif $\sup_{1 \leq i \leq d} |x_i|$ est une norme sur $\mathbf{R}^d$. Cette norme est-elle équivalente à la norme euclidienne ?

I.4.b) Montrer qu'il existe un réel positif γ ne dépendant que de d et du choix de $v_1, \dots, v_d$ tel que, pour tout $\delta > 0$ et tout $x \in \mathbf{R}^d$,

$$A(\delta, B(x, \delta)) \leq \gamma$$

I.4.c) Montrer qu'il existe deux constante $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ ne dépendant que de d et du choix de $v_1, \ldots, v_d$ telles que, pour tout $\delta > 0$,
$$\gamma_1\, A(\delta, F) \leq N(\delta, F) \leq \gamma_2\, A(\delta, F)$$

I.4.d) Montrer que B-dim(F) existe si et seulement si $\frac{\ln A(\delta,F)}{-\ln \delta}$ a une limite quand $\delta \downarrow 0$ et dans ce cas on a

$$\text{B-dim}(F) = \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{\ln A(\delta, F)}{-\ln \delta}$$

I.5) Soit L un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^d$ de dimension $p \geq 1$ et de base $\{v_1, \ldots, v_p\}$.
I.5.a) Pour $\alpha > 0$ et pour

$$U_\alpha = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p;\ \forall i \in \{1, \ldots, p\},\ \lambda_i \in [-\alpha, \alpha]\}$$

estimer $A(\delta, U_\alpha)$ puis B-dim(U_α).
I.5.b) Pour tout $R > 0$, montrer qu'il existe $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ tels que

$$U_{\alpha_1} \subset L \cap B(0, R) \subset U_{\alpha_2}$$

I.5.c) En déduire que, pour tout $R > 0$,
$$\text{B-dim}(L \cap B(0, R)) = p$$

PARTIE II

II.1.a) Soit $s \in \,]1, 2[$ et $\lambda > 2$. Montrer que la formule

$$f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda^{(s-2)k} \sin(\lambda^k\, t)$$

définit une application continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
II.1.b) Montrer que
$$G = \{(t, f(t));\ t \in [0, 1]\}$$
est une partie bornée de $\mathbf{R}^2$.
II.2) Montrer que, pour t réel et $h \in \,]0, 1/\lambda[$,

$$|f(t + h) - f(t)| \leq c\, h^{2-s}$$

où c est une constante ne dépendant ni de t ni de h.
Indication : on pourra découper la somme définissant f en les N premiers termes et le reste, où N est tel que $\lambda^{-(N+1)} \leq h \leq \lambda^{-N}$.
II.3.a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout réel t' il existe $h' \in [1/2, 1[$ vérifiant

$$|\sin(t + t') - \sin t'| > \varepsilon$$

II.3.b) Dorénavant ε est un réel fixé satisfaisant la condition de la question précédente. Montrer que si λ est choisi suffisamment grand (ce que l'on supposera dans les questions suivantes), on a, pour $0 \leq t < t + h$ et N tel que $\lambda^{-(N+1)} \leq h \leq \lambda^{-N}$, l'inégalité

$$\left| f(t+h) - f(t) - \lambda^{(s-2)N} \left(\sin(\lambda^N (t+h)) - \sin(\lambda^N t)\right) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\, \lambda^{(s-2)N}$$

II.3.c) Soit $\delta < 1$. Pour $N \geq 1$ tel que $\lambda^{-N} \leq \delta < \lambda^{-(N-1)}$, montrer qu'on peut trouver h tel que $\lambda^{-(N+1)} \leq h < \lambda^{-N}$ et

$$|f(t+h) - f(t)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\,\lambda^{s-2}\,\delta^{2-s}$$

II.4) On pose, pour $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$,

$$\omega(t_1, t_2) = \sup_{t_1 \leq u \leq v \leq t_2} |f(u) - f(v)|$$

Montrer qu'il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$ ne dépendant que de f telles que, pour tout réel t et tout δ suffisamment petit,

$$C_1\,\delta^{2-s} \leq \omega(t, t+\delta) \leq C_2\,\delta^{2-s}$$

II.5) On pose $v_1 = (1, 0)$ et $v_2 = (0, 1)$. La quantité $A(\delta, G)$ désigne le nombre de δ-cubes construits à partir de v_1 et de v_2 et qui intersectent G, comme défini à la question I.4. Montrer que, pour tout $\delta > 0$,

$$\frac{1}{\delta}\sum_{i=0}^{q-1}\omega(i\delta, i\delta+\delta) \leq A(\delta, G) \leq 2q + 1 + \frac{1}{\delta}\sum_{i=0}^{q-1}\omega(i\delta, i\delta+\delta)$$

où q désigne le plus petit entier supérieur ou égal à $1/\delta$.

II.6) Calculer B-dim(G).

PARTIE III

Soit E une partie compacte de $\mathbf{R}^d$. On considère des applications $S_1, \ldots, S_m$ de E dans E pour lesquelles il existe des constantes $c_1, \ldots, c_m \in [0, 1[$ telles que

$$\|S_i(x) - S_i(y)\| \leq c_i\,\|x - y\|$$

pour tous $i \in \{1, \ldots, m\}$, $x \in E$, $y \in E$. On note $\mathcal{K}$ l'ensemble des compacts non vides de E. Pour $A \in \mathcal{K}$ on pose

$$\varphi(A) = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(A)$$

où, comme d'habitude, $S_i(A) = \{S_i(x);\ x \in A\}$.

III.1) Montrer que φ est une application de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$.

Pour $k \geq 1$, on définit $\varphi^k = \varphi \circ \varphi \circ \cdots \circ \varphi$ (k termes) et on pose

$$F = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \varphi^k(E)$$

III.2) Montrer que F est un compact non vide qui vérifie $\varphi(F) = F$.

Pour $A \in \mathcal{K}$ et $\mu > 0$ on pose :

$$A^\mu = \{y \in \mathbf{R}^d;\ \exists x \in A,\ \|x - y\| \leq \mu\}$$

Pour $A, B \in \mathcal{K}$ on pose :

$$d(A, B) = \inf\{\mu > 0;\ A \subset B^\mu \text{ et } B \subset A^\mu\}$$

III.3) Montrer que, pour $A, B \in \mathcal{K}$,

$$d(A, B) = 0 \iff A = B$$

III.4) Pour tous $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{K}$, montrer que

$$d\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i, \bigcup_{i=1}^{m} B_i\right) \leq \max_{1\leq i\leq m} d(A_i, B_i)$$

III.5) Trouver une constante $M \in [0,1[$ ne dépendant que de $c_1, \ldots, c_m$ telle que, pour $A, B \in \mathcal{K}$,

$$d(\varphi(A), \varphi(B)) \leq M\, d(A, B)$$

III.6) Montrer que F est l'unique compact non vide tel que $\varphi(F) = F$.
III.7) Montrer que $\varphi^k(E)$ tend vers F quand $k \to +\infty$ au sens suivant :

$$\lim_{k\to+\infty} d(\varphi^k(E), F) = 0$$

On suppose désormais, qu'en plus des hypothèses précédentes, on a, pour tous $i \in \{1, \ldots, m\}$, $x \in E$, $y \in E$,

$$\|S_i(x) - S_i(y)\| = c_i\, \|x - y\|,$$

que $c_i \in]0,1[$ et que les ensembles $S_1(E), \ldots, S_m(E)$ sont disjoints.
III.8.a) Montrer qu'il existe un unique $s_0 \geq 0$ tel que

$$\sum_{i=1}^{m} c_i^{s_0} = 1$$

III.8.b) Si on suppose que, pour δ tendant vers 0,

$$N(\delta, F) \sim C\left(\frac{1}{\delta}\right)^s$$

où C est une constante, montrer que

$$s = \text{B-dim}(F) = s_0$$