Agrégation interne, 2006-2007.
Sujet 5.
Correction.

Partie I

I-1. Cette série entière converge pour $x = 1$ (et la somme vaut 1) donc son rayon de convergence est supérieur ou égal à 1, et elle converge donc sur $[0, 1]$.

I-2.a. On a $f(1) - f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(1 - x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(1 - x) \sum_{k=0}^{n-1} x^k$.

I-2.b. En utilisant l'égalité du 2-a), on montre sans problème la croissance de q puisqu'il est immédiat que si $0 \leq x \leq y \leq 1$, alors $q(x) \leq q(y)$. On peut aussi dériver, mais à condition de justifier que q est dérivable et que l'on peut dériver terme à terme, et montrer que la dérivée de q est positive.
Comme q est croissante sur $[0, 1[$, sa borne supérieure est la limite en 1 qui vaut, par hypothèse $f'(1)$.

I-2.c. Comme les sommes sont à termes positifs, on a $\sum_{n=1}^{N} a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \leq q(x)$. Puis, en passant à la limite quand $x \to 1$, on trouve que la série à termes positifs $\sum na_n$ est majorée par $f'(1)$; elle converge donc.

I-2.d. La question précédente prouve que X admet une espérance (puisqu'il y a convergence absolue car X est à valeurs positives). Il nous reste à calculer la somme.
A partir de l'inégalité $\sum_{n=1}^{N} a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \leq \sum_{n=1}^{N} na_n \leq f'(1)$ on fait tendre N vers l'infini et on trouve $q(x) \leq \mathbb{E}(X) \leq f'(1)$. Puis, en faisant tendre x vers 1, on montre que $\mathbb{E}(X) = f'(1)$.

I-3.a. Il suffit de reprendre les questions 2.a,b,c,d avec la fonction en remplaçant f par f' dans le quotient différentiel.

I-3.b. On vient de montrer que $X(X - 1)$ admet une espérance, qui vaut $f''(1)$, et comme X admet aussi une espérance (cf. 2.d), alors X^2 admet une espérance et donc X admet une variance qui est bien donnée par la formule proposée.

I-4.a. Comme X admet une espérance, $\sum na_n$ converge et elle fournit un majorant de q sur $[0, 1[$: puisque q est croissante sur cet intervalle, elle admet une limite en 1, ce qui prouve que $f'(1)$ existe. En appliquant le 2.d, on trouve $f'(1) = \mathbb{E}(X)$.

I-4.b. On procède de la même manière qu'à la question précédente.

Partie II

II-1. Il est évident que $y_1 = y_2 = 0$ puisqu'il faut au moins 3 lancers pour pouvoir voir apparaître la configuration. Pour un succès au troisième lancer on n'a pas le choix, et $y_3 = p^2(1 - p)$. Pour un succès au quatrième lancer on n'a que deux configurations possibles

pile-pile-pile-face ou bien *face-pile-pile-face* ce qui donne :
$y_4 = p^3(1-p) + p^2(1-p)^2 = p^2(1-p)$.
II-2. La suite d'événements $(U_n)_n$ est croissante, il en est donc de même de $(u_n)_n$ qui est manifestement majorée par 1 : la suite $(u_n)_n$ est donc convergente.
II-3.a. Avec les notations du préambule, on a :

$$P(B_n) = P_n(\Omega_{n-3} \times \{pile\} \times \{pile\} \times \{face\}) = p^2(1-p)$$

car les lancers sont indṕendants.
On peut aussi écrire $B_n = R_{n-2} \cap R_{n-1} \cap S_n$, et comme ces trois évènements sont indépendants on a

$$P(B_n) = P(R_{n-2} \cap R_{n-1} \cap S_n) = P(R_{n-2})P(R_{n-1})P(S_n) = p^2(1-p).$$

II-3.b. Il suffit d'étudier la fonction $t \mapsto t^2(1-t)$ sur $[0,1]$ (cf. figure 1). Par ailleurs, la valeur $4/27$ est obtenue pour $p = 2/3$.
II-3.c. C'est clair : $\pi_n(B_n) = face$, $\pi_n(B_{n+1}) = pile$ et $\pi_n(B_{n+2} = pile$ donc B_n et B_{n+1} sont incompatibles ainsi que B_n et B_{n+2}; l'incompatibilité de B_{n+1} et B_{n+2} s'en déduit car $n+2 = (n+1)+1$.
Remarque: on peut réécrire ce qui précède en notant que $B_n = R_{n-2} \cap R_{n-1} \cap S_n$ et $B_{n+1} = R_{n-1} \cap R_n \cap S_{n+1}$ et comme $R_n \cap S_n = \emptyset$ on a bien $B_n \cap B_{n+1} = \emptyset$.
II-3.d. $u_3 = P(B_3) = a$, $u_4 = P(B_3 \cup B_4) = P(B_3) + P(B_4) = 2a$ et $u_5 = P(B_3 \cup B_4 \cup B_5) = P(B_3) + P(B_4) + P(B_5) = 3a$ car B_3,B_4 et B_5 sont deux à deux incompatibles.
II-4.a. On utilise II-3-c) en remarquant que $U_{n+2} = U_n \cup B_{n+1} \cup B_{n+2}$: on en déduit, puisque U_n et B_{n+3} sont indépendants :

$$P(U_{n+2} \cap B_{n+3}) = P(U_n \cap B_{n+3}) = au_n$$

II-4.b. A partir de $U_{n+3} = U_{n+2} \cup B_{n+3}$ et en utilisant le résultat précédent, on obtient :

$$u_{n+3} = P(U_{n+2}) + P(B_{n+3}) - P(U_{n+2} \cap B_{n+3}) = u_{n+2} + a - au_n$$

II-4.c. En notant l la limite de la suite convergente $(u_n)_n$ et en passant à la limite dans l'égalité montrée au b), on trouve : $l = l + a(1-l)$. Et comme $a > 0$, on en déduit $l = 1$.
L'événement $(Y = 0)$ est le complémentaire de $\bigcup_{k=3}^{\infty} B_k = \bigcup_{n=3}^{\infty} U_n$, donc, en utilisant la propriété de $\sigma-$additivité appliquée à la suite croissante $(U_n)_n$, on a :

$$y_0 = P(Y=0) = 1 - P(\bigcup_{k=3}^{\infty} B_k) = 1 - \lim_{n \to +\infty} P(U_n) = 0.$$

Ceci prouve donc que l'événement “la configuration *pile-pile-face* apparaît au moins une fois” est presque certain.
II-5.a. Il ne faut pas oublier de vérifier l'identité pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$ car à la question II-4-b) on a supposé $n \geq 3$.
II-5.b. Il est facile de montrer que $\mathcal{E}_p$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vecotriel sur $\mathbb{R}$ des suites réelles. Il est clairement de dimension finie égale à 3 puisque la donnée des trois premiers termes caractérise la suite. On peut d'ailleurs montrer que les suites dont les premiers termes sont (1,0,0), (0,1,0) et (0,0,1) forment une base de $\mathcal{E}_p$.

II-6.a. Il suffit d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction continue $t \mapsto t^3 - t^2 + a$ sur les trois intervalles $[-\frac{1}{3}, 0]$, $[0, \frac{2}{3}]$ et $[\frac{2}{3}, 1]$, et de remarquer que les valeurs 0, $\frac{2}{3}$ et 1 sont exclues.
On peut aussi réécrire $t^3 - t^2 + a = 0$ en $t^2(1-t) = a$ et on peut reprendre l'étude de la fonction du II-3-b) (cf. figure 1). Les bornes sont faciles à obtenir avec l'encadrement de la question II-3-b) et en remarquant qu'ici $a < 4/27$ puisque $p \neq 2/3$.
On peut aussi remarquer que $t^3 - t^2 + a = (t-p)(t^2 - (1-p)t - p(1-p))$ et que donc p est toujours solution : $\alpha = p$ si $p \geq \frac{2}{3}$ et sinon c'est β qui est égal à p.
II-6.b. Les suites géométriques $(\alpha^n)_n$, $(\beta^n)_n$ et $(\gamma^n)_n$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathcal{E}_p$ (si une combinaison linéaire de ces trois suites donne la suite nulle, en regardant les trois premiers termes on obtient un déterminant de Van Der Monde qui montre que les coefficients de la combinaison linéaire sont nuls). D'où l'unicité du triplet (A, B, C). Il est inutile d'expliciter ces trois coefficients, mais on peut remarquer qu'ils sont entièrement déterminés par v_0, v_1 et v_2: on peut écrire un système linéaire inversible (voir ci-dessous).
II-6.c. Ce sont précisément les lignes de ce système que l'on demande ici :

$$A + B + C = v_0 = 1 \quad ; \quad \alpha A + \beta B + \gamma C = v_1 = 1 \quad ; \quad \alpha^2 A + \beta^2 B + \gamma^2 C = v_2 = 1.$$

II-6.d. Les relations entre coefficients et racines de $t^3 - t^2 + a$ donnent :

$$\alpha + \beta + \gamma = 1 \quad ; \quad \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = 0 \quad ; \quad \alpha\beta\gamma = -a$$

II-6.e. On a

$$\begin{aligned} A(\beta+\gamma) + B(\alpha+\gamma) + C(\alpha+\beta) &= (A+B+C)(\alpha+\beta+\gamma) - (\alpha A + \beta B + \gamma C) \\ &= 1 \times 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Par exemple, on peut écrire:

$$\begin{aligned} A\beta\gamma + B\alpha\gamma + C\alpha\beta &= A(-\alpha\beta - \alpha\gamma) + B(-\beta\alpha - \beta\gamma) + C(-\gamma\alpha - \gamma\beta) \\ &= -\alpha A(1-\alpha)^2 - \beta B(1-\beta)^2 - \gamma C(1-\gamma)^2 = -1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

II-7.a. On a déjà 2/3 comme solution qui se révèle être une racine double, la troisième racine est -1/3.
II-7.b. La même démarche qu'au II-6) fonctionne sauf qu'ici la base est donnée par les trois suites $((-\frac{1}{3})^n)_n$, $((\frac{2}{3})^n)_n$ et $(n(\frac{2}{3})^n)_n$. Les coefficients A, B et C se calculent explicitement et on trouve finalement l'expression de $(v_n)_n$.
II-8.a. Regardons le cas $p \neq 2/3$: on a toujours $\max\{\beta, |\gamma|\} < \alpha$ en vertu des inégalités du II-6-a). Donc, en appliquant la règle de d'Alembert (on calcule $\lim \frac{v_n}{v_{n+1}}$), on a $R_v = \frac{1}{\alpha}$.
Le cas $p = 2/3$ est identique, la règle de d'Alembert donne $R_v = 3/2$.
Dans les deux cas on a bien $R_v > 1$ puisque $0 < \alpha < 1$.
II-8.b. On trouve, lorsque $p \neq 2/3$:

$$v(x) = \frac{A}{1-\alpha x} + \frac{B}{1-\beta x} + \frac{C}{1-\gamma x}$$

Puis, en réduisant au même dénominateur et en utilisant les calculs des II-6-c,d,e), on aboutit à l'expression demandée.
Il reste à vérifier que la formule donnée est encore valable lorsque $p = 2/3$. En procédant de même, mais en faisant un peu attention pour la série en $n(2/3)^n$, on trouve :

$$v(x) = \frac{1}{9} \times \frac{1}{1+x/3} + \frac{8}{9} \times \frac{1}{1-2x/3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}x \times \frac{d}{dt}\Big[\frac{1}{1-t}\Big](\frac{2}{3}x)$$

Et la poursuite du calcul mène finalement à $v(x) = \frac{1}{1-x+\frac{4}{27}x^3}$ qui est exactement la formule demandée puisque lorsque $p = 2/3$, $a = 4/27$.
II-8.c. On trouve sans problème $v(1) = 1/a$ et $v'(1) = \frac{1-3a}{a^2}$.
II-9.a. On a $(Y = n) = \overline{U_{n-1}} \bigcap U_n$. On a donc, puisque $\overline{U_{n-1}} \supset \overline{U_n}$:

$$1 = P(\overline{U_{n-1}} \bigcup U_n) = (1 - u_{n-1}) + u_n - y_n$$

Et donc : $y_n = 1 - u_n - (1 - u_{n-1}) = v_{n-1} - v_n$.
Remarque: on peut écrire cela pour $n \geq 4$ (sinon U_{n-1} n'est pas défini).
Pour la question suivante, il faut donc vérifier que la relation trouvée est encore vraie pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.
II-9.b. Avec cette identité, on a, puisque $y_0 = 0$:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (v_{n-1} - v_n)x^n = xv(x) - (v(x) - v(0)) = (x-1)v(x) + 1.$$

II-10.a. La loi de Y est donnée par la suite $(y_n)_n$, qui est elle-même totalement déterminée par la fonction $x \mapsto y(x)$ qui est de classe C^∞ sur $[0, 1]$ (formule du II-9-b) et telle que $y^{(n)}(0) = \frac{1}{n!} y_n$: or y est entièrement déterminée par a puisque v l'est.
De plus, comme $R_v > 1$, le rayon de convergence de la série entière $y(x)$ est strictement supérieur à 1, et la fonction v est de classe C^∞ sur $[0, 1]$. En appliquant les résultats du I, on prouve que Y admet une espérance et une variance qui sont :

$$\mathbb{E}(Y) = y'(1) = v(1) = \frac{1}{a}$$

et

$$V(Y) = y''(1) + y'(1) - y'(1)^2 = 2v'(1) + v(1) - v(1)^2 = 2\frac{1-3a}{a^2} + \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} = \frac{1-5a}{a^2}$$

II-10.c. Si l'on considère $\mathbb{E}(Y)$ et $V(Y)$ comme des fonctions de a, il n'est pas difficile de montrer qu'elles sont strictement décroissantes. Ainsi, elles atteignent simultanément leur minimum, unique, lorsque a est maximum, c'est-à-dire lorsque $a = a_m = 4/27$, i.e. $p = p_m = 2/3$. On a alors $\mathbb{E}(Y) = \frac{27}{4}$ et $V(Y) = \frac{189}{16}$.

Partie III

III-1. Les lancers sont indépendants, donc *pile-pile-face* a autant de chance de sortir que *face-pile-pile*. On pourraît faire la même analyse qu'au II avec $B'_n = S_{n-2} \cap R_{n-1} \cap R_n$ puisque l'on a $P(B'_n) = P(B_n) = a$.
On a $P(Y = 3 \textit{ et } Y' = 3) = 0$, et comme $P(Y = 3) = P(Y' = 3) = a \neq 0$, les deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes.

III-2.a. On a $g_3 = a = p^2(1-p)$. Pour l'évènement G_4, il n'y a qu'une possibilité pour les 4 premiers lancers qui est *pile-pile-pile-face* car si on commence par un face, le joueur J' gagne en 3 coups : $g_4 = P_4((pile, pile, pile, face)) = p^3(1-p)$. Il en est de même pour G_5, et on trouve $g_5 = p^4(1-p)$.
Le résultat se généralise, car si on n'a pas que des *piles* avant le $face$ gagnant pour J, alors c'est J' qui gagne, et on trouve $g_n = p^{n-1}(1-p)$.

III-2.b. La probalilité que J gagne est simplement :

$$\sum_{n=3}^{\infty} g_n = (1-p)p^2 \frac{1}{1-p} = p^2$$

III-3.a. $d_1 = 1$ et $d_2 = 1 - p^2$.

III-3.b. En utilisant la formule des probabilités totales appliquée à l'événement D_{n+2} avec la partition constituée des trois événements suivants :

$$K_1 = \{pile, face\} \times \Omega_1^{\mathbb{N}\cap[3,+\infty[} \quad ; \quad K_2 = \{pile, pile\} \times \Omega_1^{\mathbb{N}\cap[3,+\infty[} \quad ; \quad K_3 = \{face\} \times \Omega_1^{\mathbb{N}\cap[2,+\infty[}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} d_{n+2} &= P(D_{n+2}|K_1).P(K_1) + P(D_{n+2}|K_2).P(K_2) + P(D_{n+2}|K_3).P(K_3) \\ &= d_n.p(1-p) + 0.p^2 + d_{n+1}.(1-p) \end{aligned}$$

qui est l'égalité demandée. Notons qu'il faut justifier les trois égalités suivantes (la première et la dernière par l'indépendance et la seconde par une intersection vide) :

$$P(D_{n+2}|K_1) = d_n \quad ; \quad P(D_{n+2}|K_2) = 0 \quad ; \quad P(D_{n+2}|K_2) = d_{n+1}$$

III-3.c. OK avec les valeurs trouvées au III-3-a).

III-3.d. Comme en partie II, $(d_n)_n$ est un élément d'un espace vectoriel qui est, ici, de dimension 2 (suites vérifiant la récurrence linéaire $t^2 = (1-p)t + p(1-p)$). On obtient une base en déterminant deux suites géométriques non nulles, i.e. en résolvant l'équation $r^2 - (1-p)r - p(1-p) = 0$. Il y a deux solutions distinctes (on obtient donc bien une base) qui sont :

$$\lambda = \frac{(1-p) - \sqrt{(1-p)^2 + 4p(1-p)}}{2} \qquad \text{et} \qquad \mu = \frac{(1-p) + \sqrt{(1-p)^2 + 4p(1-p)}}{2}$$

On vérifie que $\mu > 0$ et donc que $\lambda < 0$ puisque $\lambda\mu = -p(1-p) < 0$; de plus $(-1)^2 - (1-p)(-1) - p(1-p) = p^2 - 2p + 2 > 0$ donc $\lambda > -1$ et $(1)^2 - (1-p)(1) - p(1-p) = p^2 > 0$ donc $\mu < 1$. On aurait pu aussi utiliser les formules explicites, mais cela complique un peu la preuve.
Il existe donc deux constantes L et M (qui sont uniques) telles que pour tout entier n : $d_n = L\lambda^n + M\mu^n$. On détermine L et M grâce aux termes de rangs 0 et 1, et on trouve la formule annoncée.

III-3.e. On a $\lambda = \gamma$ et μ est la racine posivive de $t^3 - t^2 + a = (t-p)(t^2 - (1-p)t - p(1-p))$ qui est distincte de p. Ainsi, $\{\alpha, \beta\} = \{p, \mu\}$.
Remarque: on peut aussi noter que $(d_n)_n$ appartient à $\mathcal{E}_p$ donc il existe A, B, C tels que $d_n = A\alpha^n + B\beta^n + C\gamma^n$ pour tout $n \geq 0$: en identifiant avec la formule du 3-d), il vient $\{\lambda, \mu\} \subset \{\alpha, \beta, \gamma\}$.

III-3.f. On calcule $(-p)^2 - (1-p)(-p) - p(1-p) = p^2 > 0$ et comme $\lambda < 0$ et $p > 0$, on a bien $|\lambda| < p$. On obtient $|\lambda| < \mu$ par :

$$|\lambda| = \frac{-(1-p) + \sqrt{(1-p)^2 + 4p(1-p)}}{2} < \frac{(1-p) + \sqrt{(1-p)^2 + 4p(1-p)}}{2} = \mu$$

Montrons les inégalités entre p et μ. On calcule $(p)^2-(1-p)(p)-p(1-p)=p(3p-2)$ et on en déduit que : si $p=2/3$, alors $3p-2=0$ et $\mu=p$; si $p>2/3$, alors $3p-2>0$ et $\mu<p$; si $p<2/3$, alors $3p-2<0$ et $\mu>p$. On retrouve en fait des résultats déjà rencontrés.

III-4.a. L'événement $((T>n)\bigcup(T=0))$ est l'événement contraire de $(T\leq n)$; il se réalise soit s'il n'y a que des *pile*s, soit s'il n'y a aucune série de deux *pile*s consécutifs dans les n premiers lancers. On trouve donc l'égalité. Ce raisonement n'est valable que si $n\geq 2$ et, en particulier, on a $P(T=1)=P(T=2)=0$.

III-4.b. On a $P(T=n)=P(T\leq n)-P(T\leq n-1)$ ce qui donne le résultat, pour $n\geq 3$.

III-4.c. La probabilité qu'un des joueurs soit déclaré gagnant est :

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(T=n)=(1-p).\frac{p^2}{1-p}+d_2-\lim d_n=p^2+1-p^2-0=1$$

Ainsi, on obtient $P(T=0)=0$ et l'événement "*un joueur est déclaré gagnant à l'issue des lancers*" (lancers en nombre infini) est presque certain.

III-5.a. Avec les résultat des III-2-b) et III-4-c), J' gagne avec une probabilité égale à $1-p^2$.

III-5.b. Le jeu est équitable pour $p^2=1-p^2$ soit pour $p=p_0=\frac{1}{\sqrt{2}}$. On a alors : $a_0=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ soit 0,146 au millième près par défaut ; $\mathbb{E}(Y_0)=4+2\sqrt{2}$ soit 6,828 au millième près par défaut ; $V(Y_0)=4+6\sqrt{2}$ soit 12,485 au millième près par défaut.

III-5.c. $a=\frac{1}{8}$, $\mathbb{E}(Y)=8$, $V(Y)=24$, $P(\text{"}J\ gagne\text{"})=\frac{1}{4}$ et $P(\text{"}J'\ gagne\text{"})=\frac{3}{4}$. Le jeu profite manifestement à J' qui gagne, en moyenne, 3 fois sur 4.

III-5.d. Les lois de Y et Y' sont fixées par $a=1/e$, mais pas le jeu: sauf dans le cas où $e=27/4$, on a le choix entre les deux jeux définis par $p=\alpha$ ou $p=\beta$. Le cas $e=27/4$ correspond au cas limite $p=\alpha=\beta$, il n'y a donc qu'un jeu possible.
Si $e<1/a_0$, alors $a>a_0$ et les jeux possibles sont tous favorables à J' ; lorsque $e=1/a_0$, alors $a=a_0$ et sur les deux jeux un est favorable à J' et l'autre est équilibré (c'est le cas $p=p_0$, l'autre solution étant $\mu_0=\mu(p_0)$) ; et lorsque $e>a_0$, alors $a<a_0$ et sur les deux jeux possibles un est favorable à J et l'autre à J'.
On voit donc que, bien que J et J' aient des lois identiques dans une situation séparée, le jeu est plus en faveur de J'.

III-6.a. Avec les propriétés du III-3-d,e) on trouve, comme au II-8-a) : $R_d=\frac{1}{\mu}>1$.

III-6.b. On procède comme au II-8-b) :

$$d(x)=\frac{1}{\mu-\lambda}\Big[(1-\lambda)\frac{1}{1-\mu x}-(1-\mu)\frac{1}{1-\lambda x}\Big]$$

On trouve la formule demandée en réduisant l'expression au même dénominateur. Notons ici que comme on a explicitement les racines λ et μ en fonction de p, on peut utiliser les formules trouvées. Toutefois, cela complique fortement les calculs, car en fait seules les quantités $\lambda+\mu$ et $\lambda\mu$ sont à connaître et on les trouve dans les coefficients de l'équation (la quantité $\lambda-\mu$, bien que présente, se simplifie).

III-6.c. On procède toujours comme au II en utilisant la formule du III-4-b) (attention, elle n'est valable que pour $n\geq 3$). Et comme $t_0=t_1=t_2=0$ et $d_0=d_1=1$ et $d_2=1-p^2$, on trouve :

$$t(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \Big[(1-p)p^{n-1}+(d_{n-1}-d_n)\Big]x^n = (1-p)x\frac{p^2x^3}{1-px}+x[d(x)-(1+x)]-[d(x)-(1+x+(1-p^2)x^2)]$$

Il ne reste plus qu'à faire le calcul algébrique pour montrer l'identité.

III-6.d. La fonction génératrice t de T étant de classe C^∞ sur $[0,1]$ (et même au-delà) tout comme $x \mapsto \frac{1}{1-px}$, la variable aléatoire T admet une espérance et une variance. On trouve alors l'espérance :

$$\mathbb{E}(T) = t'(1) = d(1) + \frac{p^2}{1-p} = \frac{1-p^2(1-p^2)}{p^2(1-p)}$$

III-7. On peut vérifier qu'on a bien $\mathbb{E}(T) < \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Y')$. Remarquons également que cette relation nous donnait directement : $P(T=0) = P(Y=0 \ ou \ Y'=0) = 0$.

III-8.a. En utilisant l'expression de III-4-b), on a :

$$P(T > N+1) = 1 - \sum_{n=3}^{N} P(T=n) = 1 - \Big[(1-p)p^2\frac{1-p^{N-2}}{1-p} + d_2 - d_N\Big] = d_N + p^N$$

On conclut avec III-3-d).

III-8.b. Il faut déterminer lequel des trois nombres p, $|\lambda|$ et μ est le plus grand, ce qui nous donnera le terme prépondérant. Avec III-3-e) on trouve : si $p > 2/3$ alors $P(T > N+1) \sim p^N$, et si $p < 2/3$ on a $P(T > N+1) \sim \frac{1-\lambda}{\mu-\lambda}\mu^N$. Le cas $p = 2/3$ est un peu plus gênant car $\mu = p$ et on trouve bien $P(T > N+1) \sim C_{2/3}(2/3)^N$ parce que la constante $C_{2/3}$ n'est pas nulle (elle vaut 4/3).

La fonction à représenter est donnée par $\tau_p = \mu = \frac{(1-p)+\sqrt{(1-p)^2+4p(1-p)}}{2}$ sur $]0,2/3]$ et par $\tau_p = p$ sur $]2/3,1[$. Notons que $\tau_p = \max(p,\mu)$.

Partie IV

IV-1.a. Z suit la loi binomiale de paramètre N et p^2.

IV-1.b. Pour N grand on peut approximer la loi binomiale par une loi normale d'espérance $m = \mathbb{E}(Z) = Np^2$ et de variance $\sigma^2 = V(T) = Np^2(1-p^2)$, à condition que p^2 ne soit proche ni de 0 ni de 1.

IV-2.a. On trouve la formule donnant $\theta(p)$ en utilisant la loi $\mathcal{N}(Np^2, Np^2(1-p^2))$ et sa densité puis en faisant un changement de variable.

IV-2.b. θ est dérivable sur $]0,1[$ et pour obtenir la dérivée, il faut voir θ comme une fonction composée. On trouve, après quelques calculs que θ est strictement décroissante. De plus, θ est prolongeable par continuité en 0 et 1 par $\theta(0) = 0$ et $\theta(1) = 1$. La fonction ainsi prolongée est dérivable en 0 et 1 et : $\theta'(0) = \theta'(1) = 0$.

IV-2.c. $\theta(p) = \frac{1}{2}$ équivaut à $p = \sqrt{k}$. Lorsque $k = \frac{1}{2}$, on trouve $p = p_0$ et on retrouve le fait que le jeu est équilibré et lorsque $k = \frac{1}{4}$, on trouve $p = \frac{1}{2}$ et on retrouve la proportion 3/4-1/4 favorable à J' (cf. III-5-b,c)).