**Agrégation interne, 2006-2007.**
**Sujet 4.**
**Correction.**

## Partie I

**I-1.** Soit $x, y \in I$, puisque $\varphi$ est de classe $C^2$ la formule de Taylor-Lagrange implique l'existence de $z$ dans l'intervalle $[x, y]$ (si $x \leq y$, sinon il faut considérer $[y, x]$) tel que

$$\varphi(y) = \varphi(x) + (y-x)\varphi'(x) + \frac{(y-x)^2}{2!}\varphi''(z)$$

et puisque $\varphi''(z) \geq 0$ on obtient l'inégalité demandée.
Avec la formule de Taylor avec reste intégral, on considère les deux cas $x \leq y$ puis $y \leq x$ et on écrit

$$\varphi(y) = \varphi(x) + (y-x)\varphi'(x) + \int_x^y \frac{(y-z)^1}{1!}\varphi''(z)dz$$

et on conclut de la même manière.

**I-2.** On applique l'inégalité précédente avec $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ et $y = x_i$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ pour obtenir

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \qquad \varphi(x_i) \geq \varphi(x) + (x_i - x)\varphi'(x).$$

On multiplie l'inégalité correspondante par le réel positif $a_i$, et on fait la somme sur $i \in \{1, \ldots, n\}$ pour obtenir

$$\sum_{i=1}^n a_i\varphi(x_i) \geq \varphi(x)\sum_{i=1}^n a_i + \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i - x\sum_{i=1}^n a_i\right)\varphi'(x)$$

et puisque $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, on obtient bien $\sum_{i=1}^n a_i\varphi(x_i) \geq \varphi(x)$.

**I-3.** Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ on définit

$$a_{n,i} := \int_{a+\frac{i-1}{n}(b-a)}^{a+\frac{i}{n}(b-a)} f(x)dx \quad et \quad x_{n,i} := g\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right).$$

On peut alors, pour chaque $n \geq 1$, appliquer le résultat de la question précédente pour obtenir

$$(1) \qquad \forall n \geq 1, \qquad \varphi\left(\sum_{i=1}^n a_{n,i}x_{n,i}\right) \leq \sum_{i=1}^n a_{n,i}\varphi(x_{n,i}).$$

Puisque la fonction $g$ est continue sur le segment $[a, b]$, elle est absolument continue sur ce segment, donc

$$\sup\{|g(x) - g(y)| \,:\, x, y \in [a, b],\, |x-y| \leq \varepsilon\} \;\to\; 0 \quad quand \quad \varepsilon \to 0.$$

Or on a

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{i=1}^{n} a_{n,i}x_{n,i} - \int_a^b g(x)f(x)dx\right| \\
&\quad \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{a+\frac{i-1}{n}(b-a)}^{a+\frac{i}{n}(b-a)} \left|g\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right) - g(x)\right| f(x)dx \\
&\quad \leq \sup\left\{|g(x)-g(y)| \,:\, x,y\in[a,b],\, |x-y|\leq \frac{1}{n}\right\} \int_a^b f(x)dx
\end{aligned}$$

et le terme de droite tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Puisque $\varphi$ est continue, le terme de gauche de (1) tend donc vers $\varphi\left(\displaystyle\int_a^b g(x)f(x)dx\right)$.

Pour le membre de droite, on conclut de la même manière en remarquant que $\varphi \circ g$ est continue sur $[a,b]$ comme composée de fonctions continues.

## PARTIE III

**III-1.** D'après l'énoncé, on considère que $t \mapsto t\, ln(t)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ et nulle en 0.
Soit $f \in \mathcal{F}$, alors $t \mapsto f(t)\, ln(f(t))$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, en particulier $\int_{-A}^{A} f(t)\, ln(f(t))dt$ est bien définie pour tout $A > 0$.
Soit $M > 0$ tel que $x^2 f(x) \leq M$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et soit $A := \sqrt{eM}$, alors on remarque que pour $|x| \geq A$ on a $0 \leq f(x) \leq \frac{M}{x^2} \leq e^{-1}$. Or la fonction $t \mapsto t\, ln(t)$ est négative et décroissante sur $[0, e^{-1}]$ donc on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |x| \geq A \;\Rightarrow\; \frac{M}{x^2} ln\left(\frac{M}{x^2}\right) \leq f(x)\, ln(f(x)) \leq 0.$$

Or les intégrales de Bertrand $\int_{-\infty}^{-A} \frac{-2M}{x^2} ln(x)dx$ et $\int_{A}^{\infty} \frac{-2M}{x^2} ln(x)dx$ sont bien définies, tout comme les intégrales $\int_{-\infty}^{-A} \frac{M}{x^2} ln(M)dx$ et $\int_{A}^{\infty} \frac{M}{x^2} ln(M)dx$.
On en conclut que $H(f)$ est bien définie.

**III-2.** On vérifie facilement que $g_{\mu,\sigma}$ appartient à $\mathcal{F}$: pour cela, l'énoncé rappelle que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

et pour montrer que $x \mapsto x^2 g_{\mu,\sigma}(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$, on utilise qu'elle est bornée sur les bornés (car continue), et qu'elle tend vers 0 en $\pm\infty$.
Les valeurs de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\, g_{\mu,\sigma}(x)dx$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2\, g_{\mu,\sigma}(x)dx$ s'obtiennent par intégration par parties (justifier avant tout la convergence de ces intégrales).
On trouve $H(g_{\mu,\sigma}) = \frac{1}{2} + ln(\sigma\sqrt{2\pi})$.

**III-3.a.** Pour démontrer que $K_{\mu,\sigma}$ est bien définie, il suffit de remarquer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$ est bien définie. Pour cela, on peut utiliser l'inégalité

$$\forall a,b \in \mathbb{R}, \qquad (a+b)^2 \;\leq\; 2\,a^2 + 2\,b^2.$$

En appliquant I-1 à la fonction $t \mapsto -ln(t)$, convexe sur $]0, +\infty[$, aux points $x = f(t)$ et $y = g_{\mu,\sigma}(t)$ (tous deux dans $]0, +\infty[$), on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad -ln(g_{\mu,\sigma}(t)) \ \geq -ln(f(t)) + (g_{\mu,\sigma}(t) - f(t)) \left(-\frac{1}{f(t)}\right)$$

et donc en multipliant par le réel positif $f(t)$ on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f(t)\, ln\left(\frac{f(t)}{g_{\mu,\sigma}(t)}\right) \ \geq \ f(t) - g_{\mu,\sigma}(t).$$

Il suffit d'intégrer sur $\mathbb{R}$, en notant que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) - g_{\mu,\sigma}(t)\, dt = 1 - 1 = 0.$

**III-3.b.** Il suffit de mener le calcul:

$$\begin{aligned}
H(g_{m,s}) - H(f) &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\, ln(f(x)) - g_{m,s}(x)\, ln(g_{m,s}(x))\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x)\, ln\left(\frac{f(x)}{g_{m,s}(x)}\right) + (f(x) - g_{m,s}(x))\, ln(g_{m,s}(x))\, dx \\
&= K_{m,s}(f) + \int_{R} (f(x) - g_{m,s}(x))\, ln(g_{m,s}(x))\, dx \\
&\geq \int_{R} (f(x) - g_{m,s}(x))\, ln(g_{m,s}(x))\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} (f(x) - g_{m,s}(x)) \left(-ln(s\sqrt{2\pi}) - \frac{(x-m)^2}{2s^2}\right) dx.
\end{aligned}$$

Il reste à remarquer que l'intégrale du membre de droite est nulle car

$$\int_{R} f(x)dx = \int_{R} g_{m,s}(x)dx = 1$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,(x-m)^2\, dx = \int_{\mathbb{R}} g_{m,s}(x)\,(x-m)^2\, dx = s$$

par choix de $m$ et $s$ et III-2.