**Agrégation interne, 2006-2007.**
**Sujet 1.**
**Correction.**

## QUESTIONS PRELIMINAIRES

**a)** On démontre par récurrence sur $n \geq 1$ la propriété

$$f^n \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \qquad et \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (f^n)'(x) = \prod_{0\leq i\leq n-1} f'(f^i(x)).$$

Pour $n = 1$ la propriété découle des hypothèses sur $f$ et de la convention adoptée pour $f^0$.
Soit $n \geq 1$, on suppose la propriété vérifiée au rang $n$, alors $f^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $f^{n+1} = f \circ f^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de la fonction $f$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et de la fonction $f^n$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. De plus si $x \in \mathbb{R}$ on calcule:

$$\begin{aligned}(f^{n+1})'(x) &= (f \circ f^n)'(x) = f'(f^n(x))(f^n)'(x) \\ &= f'(f^n(x)) \prod_{0\leq i\leq n-1} f'(f^i(x)) = \prod_{0\leq i\leq n} f'(f^i(x)).\end{aligned}$$

La propriété est donc vérifiée au rang $n + 1$, ce qui conclut la preuve.

**b)** Soit $x_0$ un point périodique attractif de $f$ de période $q$ et $i \in \{1, \ldots, q-1\}$ (il n'y a rien à démontrer dans le cas $i = 0$). On remarque que $f^i(x_0)$ est un point périodique de $f$ de période $r$ inférieure ou égale à $q$ puisque

$$f^q(f^i(x_0)) = f^{q+i}(x_0) = f^{i+q}(x_0) = f^i(f^q(x_0)) = f^i(x_0).$$

Comme $f^r(f^i(x_0)) = f^i(x_0)$ et $i \leq q-1$, en appliquant $f^{q-i}$ à cette égalité on obtient

$$f^r(x_0) = f^{q-i}(f^r(f^i(x_0))) = f^{q-i}(f^i(x_0)) = f^q(x_0) = x_0.$$

Comme $q$ est la période de $x_0$, on obtient $r \geq q$ et donc $r = q$, donc $f^i(x_0)$ est un point périodique de $f$ de période $q$. C'est un point périodique attractif de $f$ car

$$\begin{aligned}(f^q)'(f^i(x_0)) &= \prod_{0\leq j\leq q-1} f'(f^j(f^i(x_0))) = \prod_{0\leq j\leq q-1} f'(f^{j+i}(x_0)) \\ &= \prod_{i\leq j\leq q-1} f'(f^j(x_0)) \times \prod_{0\leq j\leq i-1} f'(f^{j+q}(x_0)) \\ &= \prod_{i\leq j\leq q-1} f'(f^j(x_0)) \times \prod_{0\leq j\leq i-1} f'(f^j(x_0)) \\ &= \prod_{0\leq j\leq q-1} f'(f^j(x_0)) = (f^q)'(x_0)\end{aligned}$$

donc $|(f^q)'(f^i(x_0))| = |(f^q)'(x_0)| < 1$ car $x_0$ est un point périodique attractif.
On montre enfin que $x_0$ et $f^i(x_0)$ ont la même orbite:

$$\begin{aligned}O(f^i(x_0)) &= \{f^j(f^i(x_0)) : 0 \leq j \leq q-1\} \\ &= \{f^j(x_0) : i \leq j \leq q-1\} \cup \{f^j(f^q(x_0)) : 0 \leq j \leq i-1\} = O(x_0).\end{aligned}$$

## PARTIE I

**1)a)** On remarque que quand $c > \frac{1}{4}$, on a

$$(A) \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f_c(x) - x \ = \ x^2 - x + c \ > \ x^2 - x + \frac{1}{4} \ = \ (x - \frac{1}{2})^2 \ \geq \ 0.$$

Soit alors $x \in \mathbb{R}$, on déduit de ce qui précède que la suite $(f_c^n(x))_{n\geq 0}$ est strictement croissante, donc soit elle tend vers $+\infty$, soit elle a une limite finie $l \in \mathbb{R}$. Dans ce deuxième cas, on déduit de la continuité de $f_c$ que

$$f_c(l) \ = \ f_c(\lim_{n\to+\infty} f_c^n(x)) \ = \ \lim_{n\to+\infty} f_c^{n+1}(x) = l$$

donc $l$ est un point fixe de $f$. Or $f$ n'a pas de point fixe en raison de $(A)$. On obtient donc que $\lim_{n\to+\infty} f_c^n(x) = +\infty$, et ce pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On remarque que si $x_0$ est un point périodique de $f_c$, alors la suite $(f_c^n(x))_{n\geq 0}$ prend ses valeurs dans l'orbite de $x_0$, qui est un ensemble fini donc borné: la fonction $f_c$ n'a donc pas de point périodique.

**1)b)** De la même façon que pour $(A)$, on obtient

$$(B) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f_{\frac{1}{4}}(x) - x \ = \ x^2 - x + \frac{1}{4} \ = \ (x - \frac{1}{2})^2 \ \geq \ 0.$$

Soit $x$ tel que $|x| > \frac{1}{2}$. On déduit de $(B)$ que la suite $(f_{\frac{1}{4}}^n(x))_{n\geq 0}$ est croissante, et en particulier

$$\forall n \geq 1, \qquad f_{\frac{1}{4}}^n(x) \ \geq \ f_{\frac{1}{4}}(x) \ = \ f_{\frac{1}{4}}(|x|) \ \geq \ |x| \ > \ \frac{1}{2}$$

où on a utilisé la parité de $f$. Puisque la suite $(f_{\frac{1}{4}}^n(x))_{n\geq 0}$ est croissante, soit elle tend vers $+\infty$, soit elle a une limite finie $l > \frac{1}{2}$ (d'après la série d'inégalités ci-dessus). Le même raisonnement qu'à la question précédente prouve que dans ce dernier cas, $l$ doit être un point fixe de $f_{\frac{1}{4}}$, or d'après $(B)$ le seul point fixe de cette fonction sur $\mathbb{R}$ est $\frac{1}{2}$. On en déduit donc que $\lim_{n\to+\infty} f_{\frac{1}{4}}^n(x) = +\infty$.
Soit maintenant $x$ tel que $|x| \leq \frac{1}{2}$. Puisque $f_{\frac{1}{4}}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ on a

$$\forall y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \qquad f_{\frac{1}{4}}(y) \ = \ f_{\frac{1}{4}}(|y|) \ \in \ [f_{\frac{1}{4}}(0), f_{\frac{1}{4}}(\frac{1}{2})] \ \subset \ [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}].$$

On en déduit que la suite $(f_{\frac{1}{4}}^n(x))_{n\geq 0}$ est contenue dans le segment $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, et puisqu'elle est croissante elle converge vers une limite $l$ qui d'après ce qui précède ne peut être que $\frac{1}{2}$. Donc $\lim_{n\to+\infty} f_{\frac{1}{4}}^n(x) = \frac{1}{2}$.
Soit $x_0$ un point périodique de $f_{\frac{1}{4}}$, alors la suite $(f_{\frac{1}{4}}^n(x))_{n\geq 0}$ prend ses valeurs dans l'orbite de $x_0$, qui est un ensemble fini: on en déduit que $x_0 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, et puisque dans ce cas $\lim_{n\to+\infty} f_{\frac{1}{4}}^n(x) = \frac{1}{2}$, on en déduit que $\frac{1}{2}$ est dans l'orbite de $x_0$. Or $\frac{1}{2}$ est un point périodique d'orbite $\{\frac{1}{2}\}$, et d'après la question préliminaire b) on déduit que $x_0$ et $\frac{1}{2}$ ont la même orbite, donc $x_0 = \frac{1}{2}$.
Donc $f_{\frac{1}{4}}$ a pour seul point périodique le point $\frac{1}{2}$, dont l'orbite est $\{\frac{1}{2}\}$.

**2)a)** L'équation $f_c(x) = x$ s'écrit $x^2 - x + c = 0$, le discriminant $\Delta$ de cette équation du second degré est $\Delta = 1 - 4c$, qui est strictement positif quand $c < \frac{1}{4}$. Dans ce cas la fonction $f_c$ a donc deux points fixe

$$\beta \;=\; \frac{1+\sqrt{\Delta}}{2} \qquad et \qquad \alpha \;=\; \frac{1-\sqrt{\Delta}}{2}$$

et on a évidemment $|\alpha| \leq \frac{1+\sqrt{\Delta}}{2} = \beta$.
On remarque de plus que si $x > \beta$ alors

$$f_c(x) - x \;=\; (x-\beta)(x-\alpha) \;>\; 0.$$

Le même raisonnement qu'au 1)b) montre que dans ce cas $\lim\limits_{n\to+\infty} f_c^n(x) = +\infty$.
Ceci est également vrai quand $x < -\beta$: puisque $f_c$ est paire, les suites $(f_c^n(x))_{n\geq 1}$ et $(f_c^n(|x|))_{n\geq 1}$ coincident.

**2)b)** Je vous laisse tracer le graphe de $f_{-1}$.

**3)a)** Puisque $f_c$ est paire, on a $f_c([-\beta,\beta]) = f_c([0,\beta])$, et puisque $f_c$ est croissante et continue sur $\mathbb{R}_+$ on a $f_c([0,\beta]) = [f_c(0), f_c(\beta)]$. On en déduit

$$f_c([-\beta,\beta]) \subset [-\beta,\beta] \quad\Leftrightarrow\quad f_c(0) \geq -\beta \quad\Leftrightarrow\quad c \geq -\beta \quad\Leftrightarrow\quad c \geq -2.$$

Si cette inclusion n'est pas vérifiee on a $|f_c(0)| > \beta$, donc d'après la question 2)a) on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_c^n(f_c(0)) = +\infty$, ce qui implique bien $\lim\limits_{n\to+\infty} f_c^n(0) = +\infty$.

**3)b)** Le point $\alpha$ est un point périodique de période 1 de $f_c$, donc

$$\alpha \text{ est un point attractif} \quad\Leftrightarrow\quad |f_c'(\alpha)| < 1 \;\Leftrightarrow\; 2|\alpha| < 1 \;\Leftrightarrow\; -\frac{3}{4} < c < \frac{1}{4}.$$

**3)c)** Soit $c \in [0, \frac{1}{4}[$, alors $\alpha \geq 0$.
Soit d'abord $x \in [0,\alpha]$, alors comme on a

$$(C) \qquad\qquad \forall y \in [0,\alpha] \qquad\qquad f_c(y) - y \;=\; (y-\alpha)(y-\beta) \;\geq\; 0,$$

et $f_c([0,\alpha]) = [f_c(0), f_c(\alpha)] = [0,\alpha]$ (car $f_c$ est continue et croissante sur $[0,\alpha]$), on en déduit que la suite $(f_c^n(x))_{n\geq 0}$ est croissante et majorée, elle converge donc vers un point fixe de $f_c$ (voir raisonnement du 1)a) ), qui ne peut être que $\alpha$ (car ce point fixe appartient à $[0,\alpha]$).
Soit maintenant $x \in [\alpha,\beta[$, alors comme on a

$$(C') \qquad\qquad \forall y \in [\alpha,\beta[ \qquad\qquad f_c(y) - y \;=\; (y-\alpha)(y-\beta) \;\leq\; 0,$$

et $f_c([\alpha,\beta[\,) = [f_c(\alpha), f_c(\beta)[ = [\alpha,\beta[$ (car $f_c$ est continue et croissante sur $[\alpha,\beta]$), on en déduit que la suite $(f_c^n(x))_{n\geq 0}$ est décroissante et minorée, elle converge donc vers un point fixe de $f_c$, qui ne peut être que $\alpha$ (car ce point fixe appartient à $[\alpha,x]$ et $x < \beta$).
Puisque $f_c$ est paire, les suites $(f_c^n(x))_{n\geq 1}$ et $(f_c^n(|x|))_{n\geq 1}$ coincident, donc on déduit de ce qui précède que

$$\forall x \in\, ]-\beta,\beta[ \qquad\qquad \lim_{n\to+\infty} f_c^n(x) = \alpha.$$

De même qu'en 1)b), on en conclut que les seuls points périodiques possibles pour $f_c$ sont les points $\alpha$ et $\beta$. On remarque alors que $\alpha$ est un point périodique attractif de période 1 et que $\beta$ est un point périodique de période 1 qui n'est pas attractif. L'orbite attractive est donc $\{\alpha\}$.

## PARTIE II

**1)a)** Puisque $x_0$ est un point périodique attractif de période $q$ de $f$, c'est un point fixe de $g$ (qui est aussi une application de classe $\mathcal{C}^1$ d'après la question préliminaire a)) et on a $|g'(x_0)| < 1$. Puisque $g'$ est continue en $x_0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall y \in ]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\,, \qquad |g'(y)| \leq K := \frac{|g'(x_0)| + 1}{2} < 1.$$

L'inégalité des accroissements finis permet alors d'obtenir

$$(D) \qquad \forall y, z \in ]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\,, \qquad |g(y) - g(z)| \leq K|y - z| < |y - z|.$$

En particulier, on a

$$\forall y \in ]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\,, \qquad |g(y) - x_0| = |g(y) - g(x_0)| \leq K|y - x_0| < |y - x_0| < \varepsilon.$$

On en déduit que si $y \in ]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ alors $g(y) \in ]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, avec de plus $|g(y) - x_0| \leq K|y - x_0|$. On obtient alors facilement par récurrence que

$$\forall y \in ]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\,, \forall n \geq 1, \qquad |g^n(y) - x_0| \leq K^n|y - x_0|.$$

Puisque $0 \leq K < 1$, on en déduit que

$$\forall y \in ]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\,, \qquad \lim_{n \to +\infty} g^n(y) = x_0.$$

**1)b)** Soit $x \in U_{x_0}$, on veut montrer que $U_{x_0}$ contient un voisinage ouvert de $x$. Puisque $x \in U_{x_0}$ il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^N(x) \in ]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$.
L'application $g^N$ étant continue, l'ensemble $V := (g^N)^{-1}(]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[)$ est un ouvert, qui par définition de $N$ contient $x$. De plus pour tout $y \in V$ on a $g^N(y) \in ]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ et donc d'après la question précédente $\lim_{n \to +\infty} g^n(y) = x_0$. On en conclut que $V \subset U_{x_0}$, donc $U_{x_0}$ contient un voisinage ouvert de $x$.

**2)** On démontre d'abord que $I_{x_0}$ est un intervalle: soit $a, b \in I_{x_0}$, on veut montrer que $[a, b] \subset I_{x_0}$. On sait que $a$ appartient à un intervalle $I_a$ inclus dans $U_{x_0}$ et qui contient $x_0$, et $b$ appartient à un intervalle $I_b$ inclus dans $U_{x_0}$ et qui contient $x_0$. On peut supposer sans perte de généralité que $a < b$. Si $a < b \leq x_0$ alors $b \in I_a$ et donc $[a, b] \subset I_a \subset I_{x_0}$. De même si $x_0 \leq a < b$ alors $a \in I_b$ et donc $[a, b] \subset I_b \subset I_{x_0}$. Reste à voir le cas $a \leq x_0 \leq b$: comme $[a, x_0] \subset I_a \subset I_{x_0}$ et $[x_0, b] \subset I_b \subset I_{x_0}$, il vient $[a, b] \subset I_{x_0}$, ce qui termine la preuve.
On démontre que $I_{x_0}$ est ouvert: si $x \in I_{x_0}$, alors $x \in U_{x_0}$ qui est ouvert, donc il existe $\eta > 0$ tel que $]x - \eta, x + \eta[ \subset U_{x_0}$. On peut supposer par exemple que $x > x_0$ (le cas $x = x_0$ découle du fait que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[ \subset I_{x_0}$), dans ce cas

puisque $x \in I_{x_0}$ on sait que $[x_0, x] \subset I_{x_0}$, et donc aussi $]x_0, x+\eta[ \subset I_{x_0}$, or $]x_0, x+\eta[$ est un voisinage ouvert de $x$, ce qui conclut la preuve.

**3)** L'application $g$ étant continue, $g(\,]a,b[\,)$ est un intervalle. Soit $y \in g(\,]a,b[\,)$, alors il existe $x \in ]a,b[$ tel que $g(x) = y$, et par définition de $]a,b[$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} g^n(x) = x_0$. Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} g^n(y) = x_0$, et donc $y \in U_{x_0}$. Ceci étant vrai pour tout $y \in g(\,]a,b[\,)$, on en déduit que l'intervalle $g(\,]a,b[\,)$ est inclus dans $U_{x_0}$. Enfin $x_0 \in ]a,b[$ et $g(x_0) = x_0$ donc $x_0 \in g(\,]a,b[\,)$. Par conséquent, l'intervalle $g(\,]a,b[\,)$ est inclus dans $U_{x_0}$ et contient $x_0$: par définition de $]a,b[$, on a donc $g(\,]a,b[\,) \subset ]a,b[$.
Par continutinuité de $g$, on a $g(\{a,b\}) \subset \overline{g(\,]a,b[\,)}$, or $\overline{g(\,]a,b[\,)} \subset \overline{]a,b[} = [a,b]$. Démontrons par exemple que $g(a) \notin ]a,b[$: en effet dans le cas contraire on a $g(a) \in ]a,b[ \subset U_{x_0}$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} g^n(g(a)) = x_0$, d'où on déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} g^n(a) = x_0$ et donc $a \in U_{x_0}$. Mais alors $[a, x_0]$ est inclus dans $U_{x_0}$ (par définition de $a$ on sait déjà que $]a, x_0] \subset U_{x_0}$) et donc par définition de $]a,b[$ on devrait avoir $[a, x_0] \subset ]a,b[$, ce qui est une contradiction.

**4)a)** La dérivée de $h$ sur $]a,b[$ est donnée par

$$\forall x \in ]a,b[, \qquad h'(x) = g'(g(x))g'(x).$$

Puisque $g(\,]a,b[\,) \subset ]a,b[$ et $g'$ ne s'annule pas sur $]a,b[$, on en déduit que $h'$ ne s'annule pas sur $]a,b[$.
Comme la fonction continue $g'$ ne s'annule pas sur $]a,b[$, elle est de signe constant sur cet intervalle, et on déduit de la formule précédente que $h'$ est strictement positive sur l'intervalle $]a,b[$. Par conséquent, $h$ est strictement croissante sur l'intervalle $[a,b]$. D'après la question précédente, on doit avoir $h(\{a,b\}) \subset \{a,b\}$: puisque $h$ est strictement croissante, on a nécessairement $h(a) = a$ et $h(b) = b$.

**4)b)** L'application $x \mapsto h(x) - x$ est continue et dérivable sur $[a, x_0]$ et s'annule en $a$ et $x_0$, donc d'après le théorème de Rolle sa dérivée s'annule en au moins un point $a' \in ]a, x_0[$, pour lequel on a donc $h'(a') = 1$. L'existence de $b'$ se démontre de la même manière.

## PARTIE III

**1)** Les trois applications proposées appartiennent effectivement à $\mathcal{E}$ (il faut noter pour chacune qu'elle est de classe $\mathcal{C}^3$ et vérifier la condition).
L'ensemble des points critiques de $x \mapsto sin(x)$ est $\pi\,\mathbb{Z}$.
L'ensemble des points critiques de $x \mapsto e^{\lambda x}$ est: l'ensemble vide si $\lambda \neq 0$, $\mathbb{R}$ si $\lambda = 0$.
L'ensemble des points critiques de $x \mapsto x^2 + c$ est $\{0\}$.

**2)** On doit vérifier que $f \circ g$ est de classe $\mathcal{C}^3$ puis que la condition est satisfaite, et faire une petite récurrence pour le cas $f^n$...

**3)a)** Soit $f \in \mathcal{E}$, on suppose que $x \mapsto |f'(x)|$ atteint un minimum local en $x_1$. Par contradiction, supposons par exemple que $f'(x_1) > 0$, alors $x \mapsto f'(x)$ atteint un minimum local en $x_1$, ce qui permet de conclure que $f''(x_1) = 0$ et

$f'''(x_1) \geq 0$. D'après la condition, on a alors

$$0 \; > \; 2f'''(x_1)f'(x_1) - 3f''(x_1)^2 \; = \; 2f'''(x_1)f'(x_1) \geq 0$$

d'où la contradiction.
Remarque: dans le cas $f'(x_1) < 0$, $x \mapsto -f'(x)$ atteint un minimum local en $x_1$ et donc $-f''(x_1) = 0$ et $-f'''(x_1) \geq 0$, et on obtient aussi une contradiction.

**3)b)** Supposons que $f \in \mathcal{E}$ et que $f'$ ne s'annule pas sur $]a,b[$. L'application $x \mapsto |f'(x)|$ est continue sur $[a,b]$, donc il existe $x_1 \in [a,b]$ tel que $|f'(x_1)| = \min\{|f'(x)| \,:\, x \in [a,b]\}$. On démontre que $x_1 \in \{a,b\}$: dans le cas contraire $x_1 \in ]a,b[$, et donc $x \mapsto |f'(x)|$ atteint un minimum local en $x_1$, donc $f'(x_1) = 0$ d'après la question précédente, ce qui contredit l'hypothèse faite sur $f$. Donc $x_1$ appartient à $\{a,b\}$, ce qui implique

$$\forall x \in ]a,b[ \qquad |f'(x)| > \min\{|f'(a)|, |f'(b)|\}.$$

**4)** Supposons que les deux premières assertions ne sont pas satisfaites, c'est-à-dire:

$(E)$ $\qquad \exists x < x_0 \qquad f^{qn}(x)$ ne tend pas vers $x_0$ quand $n \to +\infty$

et

$(E')$ $\qquad \exists x' > x_0 \qquad f^{qn}(x')$ ne tend pas vers $x_0$ quand $n \to +\infty$.

On reprend les notations de la partie II: on pose $g := f^q$. D'après $(E)$ et $(E')$, l'intervalle $I_{x_0}$ est borné, et peut donc s'écrire sous la forme $I_{x_0} = ]a,b[$.
On démontre que $g$ a un point critique dans l'intervalle $]a,b[$: supposons le contraire, il découle de II.4)a) qu'il existe $a' \in ]a,x_0[$ et $b' \in ]x_0,b[$ tels que $h'(a) = h'(b) = 1$, où $h = g \circ g$. Puisque $f \in \mathcal{E}$, on déduit de III.2 que $g = f^q \in \mathcal{E}$ et que $h \in \mathcal{E}$. De plus, comme $h' = (g' \circ g)g'$, $g(]a,b[) \subset ]a,b[$ et $g'$ ne s'annule pas sur $]a,b[$, donc la dérivée de $h$ ne s'annule pas sur $]a,b[$.
D'après III.3)b) appliqué à $h$ on a donc

$$|h'(x_0)| \; > \; \min\{|h'(a')|, |h'(b')|\} \; = \; 1.$$

Or $|h'(x_0)| = |g'(g(x_0))g'(x_0)| = |g'(x_0)|^2 < 1$, d'où la contradiction.
Soit donc $z$ un point critique de $g$ dans l'intervalle $]a,b[$. Comme

$$0 \; = \; g'(z) \; = \; \prod_{0 \leq i \leq q-1} f'(f^i(z))$$

il existe $i \in \{0,\ldots,q-1\}$ tel que $y := f^i(z)$ est un point critique de $f$. Enfin comme $z \in ]a,b[ \subset U_{x_0}$, on sait que

$$\lim_{n\to+\infty} f^{nq}(z) \; = \; \lim_{n\to+\infty} g^n(z) = x_0.$$

En appliquant la fonction continue $f^i$ on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} f^{nq}(y) \; = \lim_{n\to+\infty} f^i(f^{nq}(z)) \; = f^i\left(\lim_{n\to+\infty} f^{nq}(z)\right) \; = \; f^i(x_0)$$

ce qui démontre bien la troisième assertion.

**PARTIE IV**

**1)** D'après I.2)a), on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |x| > \beta \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} f_c^n(x) = +\infty.$$

Puisque $f_c \in \mathcal{E}$, ceci exclut les deux premières assertion de III.4 pour les périodiques attractifs $x_0$ et $x_1$: la troisième assertion est donc vérifiée. Soit $q_0$ la période $x_0$ et $q_1$ la période de $x_1$. Le seul point critique de $f$ est $y = 0$, on en déduit qu'il existe un point $x_0'$ de l'orbite de $x_0$ et un point $x_1'$ de l'orbite de $x_1$ tels que

$$\lim_{n\to+\infty} f^{nq_0}(0) = x_0' \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} f^{nq_1}(0) = x_1'.$$

Pour tout entier $n \geq 1$ on effectue la division euclidienne $nq_1 = k_n q_0 + r_n$ où $r_n \in \{0, \ldots, q_0 - 1\}$. Puisque $q_1 \geq 1$, la suite croissante d'entiers $(k_n)_{n\geq 1}$ tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$. On peut de plus extraire de la suite $(r_n)_{n\geq 1}$ une suite constante $(r_{n_j})_{j\geq 1}$ égale à un entier $r \in \{0, \ldots, q_0 - 1\}$. Puisque la suite $(f^{k_{n_j}q_0}(0))_{j\geq 1}$ est une suite extraite de la suite $(f^{nq_0}(0))_{n\geq 1}$ il vient

$$\lim_{j\to+\infty} f^{k_{n_j}q_0}(0) = x_0'$$

et en appliquant la fonction continue $f^r$ on a

$$\lim_{j\to+\infty} f^{k_{n_j}q_0 + r_{n_j}}(0) \ = \lim_{j\to+\infty} f^{k_{n_j}q_0 + r}(0) \ = f^r\left(\lim_{j\to+\infty} f^{k_{n_j}q_0}(0)\right) \ = \ f^r(x_0').$$

On obtient donc finalement

$$x_1' \ = \ \lim_{n\to+\infty} f^{nq_1}(0) \ = \ \lim_{j\to+\infty} f^{n_j q_1}(0) \ = \ \lim_{j\to+\infty} f^{k_{n_j}q_0 + r_{n_j}}(0) \ = \ f^r(x_0').$$

Donc $x_0$ et $x_1$ ont bien la même orbite.

**2)** En raisonnant comme à la question précédente, on voit que si $x_0$ est un point périodique attractif de $f$ de période $q$ alors il existe un point $x_0'$ de son orbite tel que

$$\lim_{n\to+\infty} f^{nq}(0) = x_0'.$$

Or on a vu à la question I.3)a) que lorsque $c < -2$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} f^n(0) = +\infty.$$

Ceci montre que $f$ n'a pas de point périodique attractif.

**3)** On suit l'indication: on note $\beta_1 < \ldots < \beta_k$ les racines de $P'$. On remarque que si $\beta_i$ est une racine d'ordre $d_i$ de $P'$, alors c'est une racine d'ordre $d_i - 1$ de $P''$. Par conséquent, on peut simplifier la fraction rationnelle $\frac{P''}{P'}$ de telle sorte qu'elle soit le rapport $\frac{Q_2}{Q_1}$ de deux polynômes tels que: le degré de $Q_2$ est inférieur de 1 à celui de $Q_1$ et le polynôme $Q_1$ est scindé et a pour racines les nombres $\beta_1, \ldots, \beta_k$. En décomposant la fraction $\frac{Q_2}{Q_1}$ en éléments simples on obtient l'existence de nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ pour lesquels

$$(F) \qquad \frac{P''(X)}{P'(X)} \ = \ \sum_{j=1}^{k} \frac{\alpha_j}{X - \beta_j}.$$

On va maintenant déterminer les valeurs des $\alpha_i$. L'idée est de multiplier par $x-\beta_i$ dans l'égalité $(F)$ et de faire tendre $x$ vers $\beta_i$: le membre de droite tend évidemment vers $\alpha_i$, tandis que dans le membre de gauche on a

$$\frac{(x-\beta_i)P''(x)}{P'(x)} \;=\; \frac{x-\beta_i}{P'(x)-P'(\beta_i)}P''(x) \;\to\; \frac{1}{P''(\beta_i)}P''(\beta_i) \;=\; 1.$$

Evidemment ce petit calcul ne marche que si $P''(\beta_i)\neq 0$... Dans le cas général, soit $d_i$ l'ordre de la racine $\beta_i$, on remarque que

$$\frac{P'(x)}{(x-\beta_i)^{d_i}} \;=\; \delta\prod_{j\neq i}(x-\beta_j)^{d_j} \;\to\; \delta\prod_{j\neq i}(\beta_i-\beta_j)^{d_j} \;\; \textit{quand} \;\; x\to\beta_i$$

où $\delta$ est le coefficient dominant de $P'$. De même, on a

$$\frac{P''(x)}{(x-\beta_i)^{d_i-1}} \;=\; \delta\sum_{l=1}^{k} d_l(x-\beta_l)^{d_l-1}\prod_{j\neq l}\frac{(x-\beta_j)^{d_j}}{(x-\beta_i)^{d_i-1}} \;\to\; \delta d_i\prod_{j\neq i}(\beta_i-\beta_j)^{d_j}$$

quand $x\to\beta_i$. Par conséquent on a

$$\frac{(x-\beta_i)P''(x)}{P'(x)} \;=\; \frac{(x-\beta_i)^{d_i}}{P'(x)}\,\frac{P''(x)}{(x-\beta_i)^{d_i-1}} \;\to\; d_i.$$

On en conclut

$$(F') \qquad \frac{P''(X)}{P'(X)} \;=\; \sum_{j=1}^{k}\frac{d_j}{X-\beta_j}.$$

Par conséquent pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{\beta_1,\dots,\beta_k\}$ on a

$$\left(\frac{P''}{P'}\right)'(x) \;=\; \frac{P'''(x)P'(x)-(P''(x))^2}{(P'(x))^2} \;=\; -\sum_{j=1}^{k}\frac{d_j}{(x-\beta_j)^2} \;<\; 0.$$

Par conséquent, pour tout $x$ tel que $P'(x)\neq 0$ on a
$P'''(x)P'(x)-(P''(x))^2<0$ et donc *a fortiori* $2P'''(x)P'(x)-3(P''(x))^2<0$.
Puisque $P$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on en conclut donc que $P$ appartient à $\mathcal{E}$.
Reste à remarquer que

$$\lim_{|x|\to+\infty}\frac{|P(x)|}{|x|} \;=\; +\infty.$$

car $P$ est de degré supérieur à 2. Par conséquent, il existe $K>0$ tel que

$$\forall x\in\mathbb{R}, \qquad |x|>K \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to+\infty}|P^n(x)|=+\infty.$$

On en conclut que si $x_0$ est un point fixe périodique attractif de $P$, alors c'est toujours la troisième assertion de la question III.4 qui est vérifiée. Le même raisonnement qu'à la question 1) montre que deux points périodiques attractifs associés au même point critique de $P$ ont la même orbite, par conséquent $P$ a au plus autant d'orbites attractives que de points critiques, soit au plus $d-1$ orbites attractives.