IUFM de La Seyne-sur-Mer
Agrégation Interne.

CORRIGÉ SUCCINCT DU SUJET ENSAE 97

T. CHAMPION

I.1. F étant bornée, elle est incluse dans un compact K non vide. On recouvre ce compact par la famille d'ouverts $(B(x,\delta))_{x\in K}$. Puisque K est compact on peut extraire de ce recouvrement un sous-recouvrement fini $(B(x_i,\delta))_{1\leq i\leq N}$ avec $N\geq 1$: puisque $F\subset K$, c'est aussi un recouvrement de F, d'où $N\in\mathcal{M}(\delta,F)$ et donc cet ensemble est non vide.

I.2.a. Si $F\subset F'$ alors tout recouvrement de F' est un recouvrement de F, donc $\mathcal{M}(\delta,F')\subset\mathcal{M}(\delta,F)$ pour tout $\delta>0$, et donc $N(\delta,F)\leq N(\delta,F')$ pour tout $\delta>0$.

On en déduit que pour tout $\delta\in]0,1[$ on a $\dfrac{\ln(N(\delta,F))}{-\ln(\delta)}\leq\dfrac{\ln(N(\delta,F'))}{-\ln(\delta)}$, d'où on obtient l'inégalité désirée en passant à la limite.

I.2.b. On remarque que pour tout $\delta>0$ on a $\mathcal{M}(|\lambda|\delta,\lambda F)=\mathcal{M}(\delta,F)$, et donc $N(|\lambda|\delta,\lambda F)=N(\delta,F)$. Pour tout $\delta\in]0,1[$ on a donc

$$\frac{\ln(N(\delta,\lambda F))}{-\ln(\delta)}=\frac{\ln(N(\frac{\delta}{|\lambda|},F))}{-\ln(\frac{\delta}{|\lambda|})-\ln(|\lambda|)}=\frac{\ln(N(\frac{\delta}{|\lambda|},F))}{-\ln(\frac{\delta}{|\lambda|})}\times\frac{-\ln(\frac{\delta}{|\lambda|})}{-\ln(\frac{\delta}{|\lambda|})-\ln(|\lambda|)}.$$

On peut donc passer à la limite quand $\delta\to 0$, ce qui montre que B-dim(λF) existe et vaut B-dim(F).

I.2.c. On remarque que pour tout $\delta>0$ on a

$$\mathcal{M}(\delta,F)+\mathcal{M}(\delta,F')\quad\subset\quad\mathcal{M}(\delta,F\cup F')\quad\subset\quad\mathcal{M}(\delta,F)\cap\mathcal{M}(\delta,F')$$

où la première somme désigne l'ensemble des entiers de la forme $N+N'$ avec $N\in\mathcal{M}(\delta,F)$ et $N'\in\mathcal{M}(\delta,F')$. On en déduit que

$$\max\{N(\delta,F),N(\delta,F')\}\ \leq\ N(\delta,F\cup F')\ \leq\ N(\delta,F)+N(\delta,F').$$

En utilisant que $N(\delta,F)+N(\delta,F')\leq 2\max\{N(\delta,F),N(\delta,F')\}$, on obtient, pour $\delta\in]0,1[$,

$$\frac{\ln(\max\{N(\delta,F),N(\delta,F')\})}{-\ln(\delta)}\leq\frac{\ln(N(\delta,F\cup F'))}{-\ln(\delta)}\leq\frac{\ln(2)+\ln(\max\{N(\delta,F),N(\delta,F')\})}{-\ln(\delta)}$$

et on conclut en passant à la limite.

I.2.d. Si $F\subset F''\subset F'$ alors on a comme précédemment

$$\frac{\ln(N(\delta,F))}{-\ln(\delta)}\leq\frac{\ln(N(\delta,F''))}{-\ln(\delta)}\leq\frac{\ln(N(\delta,F'))}{-\ln(\delta)}$$

pour $\delta\in]0,1[$: les majorants et minorants tendent vers B-dim(F) quand $\delta\to 0$, donc $\frac{\ln(N(\delta,F''))}{-\ln(\delta)}$ converge vers cette même limite.

I.3. Soit N le cardinal de F, alors pour tout $\delta>0$ on a $N(\delta,F)\leq N$ et donc B-dim$(F)=0$.

I.4.a. Puisque $(v_i)_{1\le i\le d}$ est une base de $\mathbb{R}^d$, l'application $\|x\|_v := \sup_i |x_i|$ est bien définie. On vérifie aisément que $\|x\|_v = 0 \Leftrightarrow x = 0$, que pour tout réel λ on a $\|\lambda x\|_v = |\lambda|\|x\|_v$, et que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad \|x+y\|_v = \sup_i |x_i + y_i| \le \sup_i\{|x_i| + |y_i|\} \le \sup_i |x_i| + \sup_j |y_j| = \|x\|_v + \|y\|_v.$$

Cette application à valeurs positives est donc bien une norme sur $\mathbb{R}^d$, qui est équivalente à la norme euclidienne (comme toutes les normes sur $\mathbb{R}^d$): il existe donc des constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \qquad c_1\,\|x\| \le \|x\|_v \le c_2\,\|x\|.$$

I.4.b. Soit $x = x_1\,v_1 + \ldots + x_d\,v_d$ et $\delta > 0$ alors

$$\begin{aligned} y \in C(k_1,\ldots,k_d,\delta) \cap B(x,\delta) \quad &\Rightarrow \quad \|\delta\,(k_1,\ldots,k_n) - y\|_v \le \delta \textit{ et } \|x-y\| \le \delta \\ &\Rightarrow \quad \|\delta\,(k_1,\ldots,k_n) - y\|_v \le \delta \textit{ et } \|y-x\|_v \le c_2\,\delta \\ &\Rightarrow \quad \forall i \in \{1,\ldots,d\}, \quad |k_i\,\delta - x_i| \le (c_2+1)\delta \\ &\Rightarrow \quad (k_1,\ldots,k_d) \in \frac{x}{\delta} + [-(c_2+1), c_2+1]^d \end{aligned}$$

On en déduit que $A(\delta, B(x,\delta)) \le (2\,Ent[c_2+1]+1)^d$, où $Ent[y]$ désigne la partie entière de y et où le $+1$ correspond au fait qu'il ne faut pas oublier la valeur 0 de l'intervalle $[-(c_2+1), c_2+1]$. On peut donc poser $\gamma := (2c_2+3)^d$, qui est indépendant de x et δ.

I.4.c. Soit $\delta > 0$, alors il existe $x_1, \ldots, x_{N(\delta,F)}$ tels que $F \subset \bigcup_{i=1}^{N(\delta,F)} B(x_i,\delta)$ et donc

$$A(\delta,F) \;\le\; A\left(\delta, \bigcup_{i=1}^{N(\delta,F)} B(x_i,\delta)\right) \;\le\; \sum_{i=1}^{N(\delta,F)} A\left(\delta, B(x_i,\delta)\right) \;\le\; \gamma\,N(\delta,F)$$

où γ est la constante de la question précédente: $\gamma_1 := \frac{1}{\gamma}$ convient.

Pour l'autre inégalité, on remarque que pour tout $(k_1,\ldots,k_d) \in \mathbb{Z}^d$

$$y \in C(k_1,\ldots,k_d,\delta) \;\Leftrightarrow\; \|x_\delta - y\|_v \le \frac{\delta}{2} \;\Rightarrow\; y \in B\left(x_\delta, \frac{\delta}{2\,c_1}\right)$$

où on note $x_\delta := \left(k_1\,\delta + \frac{\delta}{2}, \ldots, k_d\,\delta + \frac{\delta}{2}\right)$ et où on a utilisé l'équivalence des normes. On en déduit que $N\left(\frac{\delta}{2\,c_1}, F\right) \le A(\delta,F)$ et comme cela est valable pour tout $\delta > 0$ on a aussi $N(\delta,F) \le A\,(2\,c_1\,\delta, F)$. Enfin, comme un $(2\,c_1\,\delta)$-cube est recouvert par $(Ent[2c_1]+1+1)^d$ δ-cubes, on obtient l'inégalité souhaitée avec $\gamma_2 := (2\,c_1+3)^d$.

I.4.d. Si B-dim(F) existe alors $\frac{\ln(N(\delta,F))}{-\ln(\delta)}$ tend vers B-dim(F) quand $\delta \to 0$ et donc comme

$$\forall \delta \in]0,1[\,, \qquad \frac{\ln(N(\delta,F)) - \ln(\gamma_2)}{-\ln(\delta)} \;\le\; \frac{\ln(A(\delta,F))}{-\ln(\delta)} \;\le\; \frac{\ln(N(\delta,F)) - \ln(\gamma_1)}{-\ln(\delta)}$$

on en déduit que $\frac{\ln(A(\delta,F))}{-\ln(\delta)}$ tend vers B-dim(F) quand $\delta \to 0$. L'implication réciproque se démontre de la même manière.

I.5.a. On a

$$\forall \delta \in]0,\alpha[\,, \qquad \left(2\,(\frac{\alpha}{\delta} - 1)\right)^p \;\le\; A(\delta, U_\alpha) \;\le\; \left(2\,(\frac{\alpha}{\delta}+1)+1\right)^p$$

car U_α ne rencontre que des δ-cubes de la forme $C(k_1,\ldots,k_p,0,\ldots,0)$ où $(k_1,\ldots,k_p)$ appartient à $[-\frac{\alpha}{\delta}-1,\frac{\alpha}{\delta}]$. On en déduit

$$\forall\delta\in]0,\min\{1,\alpha\}[,\quad \frac{-p\,\ln(\delta)+p\ln(2\,(\alpha-\delta))}{-\ln(\delta)}\ \leq\ \frac{\ln(A(\delta,U_\alpha))}{-\ln(\delta)}\ \leq\ \frac{-p\,\ln(\delta)+p\ln(2\,\alpha+3\,\delta))}{-\ln(\delta)},$$

et en appliquant la question précédente on obtient que B-dim(U_α) existe et vaut p.

I.5.b. En utilisant l'équivalence des normes on obtient que $U_{\alpha_1}\subset L\cap B(0,R)\subset U_{\alpha_2}$ pour $\alpha_1:=c_1\,R$ et $\alpha_2:=c_2\,R$.

I.5.c. D'après I.5.a. on a B-dim(U_{α_1}) = B-dim$(U_{\alpha_2})=p$, on déduit donc de la question précédente et de I.2.d. que B-dim$(L\cap B(0,R))$ existe et vaut p.

II.1.a. On a

$$\forall t\in\mathbb{R},\qquad \left|\lambda^{(s-2)k}\sin(\lambda^k\,t)\right|\leq\lambda^{(s-2)k},$$

or $\lambda^{(s-2)}=e^{(s-2)\ln(\lambda)}<1$ donc la série géométrique $\sum_k\lambda^{(s-2)k}$ est convergente: la série de fonctions définissant la somme f est une série normalement convergente sur $\mathbb{R}$, et donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}$. Chacune des fonctions $t\mapsto\lambda^{(s-2)k}\sin(\lambda^k\,t)$ étant continue sur $\mathbb{R}$, f est donc continue sur $\mathbb{R}$ comme limite uniforme de fonctions continues.

II.1.b. f est continue et $[0,1]$ est compact donc l'image $f([0,1])$ est aussi un ensemble compact de $\mathbb{R}$: c'est donc un ensemble borné. Comme $G\subset[0,1]\times f([0,1])$, on en déduit que G est bornée.

II.2. Soit $t\in\mathbb{R}$, $h\in]0,\frac{1}{\lambda}[$ et $N\geq1$ tel que $\lambda^{-(N+1)}\leq h<\lambda^{-N}$. En remarquant que la fonction sinus est 1-Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, que $\lambda^{s-1}>1$ et $\lambda^{s-2}<1$, on peut calculer

$$\begin{aligned}
|f(t+h)-f(t)| &\leq \sum_{k=1}^{N}+\sum_{k\geq N+1}\left(\lambda^{(s-2)k}\left|\sin(\lambda^k\,(t+h))-\sin(\lambda^k\,t)\right|\right)\\
&\leq \sum_{k=1}^{N}\lambda^{(s-2)k}\,\lambda^k\,h+\sum_{k\geq N+1}2\,\lambda^{(s-2)k}\\
&= h\,\lambda^{s-1}\sum_{k=0}^{N-1}\lambda^{(s-1)k}+2\lambda^{(s-2)(N+1)}\sum_{k\geq0}\lambda^{(s-2)k}\\
&= h\,\lambda^{s-1}\,\frac{\lambda^{(s-1)N}-1}{\lambda^{s-1}-1}+2\lambda^{(s-2)(N+1)}\frac{1}{1-\lambda^{s-2}}\\
&\leq h\,(\lambda^{-N})^{1-s}\,\frac{\lambda^{s-1}}{\lambda^{s-1}-1}+(\lambda^{-(N+1)})^{2-s}\frac{2}{1-\lambda^{s-2}}\\
&\leq h\,h^{1-s}\,\frac{\lambda^{s-1}}{\lambda^{s-1}-1}+h^{2-s}\frac{2}{1-\lambda^{s-2}}\ =\ h^{2-s}\left(\frac{\lambda^{s-1}}{\lambda^{s-1}-1}+\frac{2}{1-\lambda^{s-2}}\right)
\end{aligned}$$

où on a utilisé que $x\mapsto x^{1-s}$ est décroissante sur $[0,+\infty[$ et $x\mapsto x^{2-s}$ est croissante sur $[0,+\infty[$. La constante $c:=\frac{\lambda^{s-1}}{\lambda^{s-1}-1}+\frac{2}{1-\lambda^{s-2}}$ est indépendante de h et t.

II.3.a. L'application sinus étant 2π-périodique, il suffit de montrer que

$$\exists\varepsilon>0,\forall t'\in[0,2\pi],\qquad \max\left\{|\sin(t'+h')-\sin(t')|\ :\ h'\in[\frac{1}{2},1[\right\}\geq\varepsilon.$$

Or la fonction $\varphi : t' \mapsto \max\left\{|\sin(t'+h') - \sin(t')| : h' \in [\frac{1}{2}, 1[\right\}$ est continue sur $[0, 2\pi]$: en effet, si $t', t'' \in [0, 2\pi]$, alors pour $h' \in [\frac{1}{2}, 1[$ tel que $\varphi(t') = |\sin(t'+h') - \sin(t')|$ on a

$$\begin{aligned}
\varphi(t') - \varphi(t'') &\leq |\sin(t'+h') - \sin(t')| - |\sin(t''+h') - \sin(t'')| \\
&\leq |\sin(t'+h') - \sin(t') - (\sin(t''+h') - \sin(t''))| \\
&\leq |\sin(t'+h') - \sin(t''+h')| + |\sin(t') - \sin(t'')| \;\leq\; 2\,|t''-t'|
\end{aligned}$$

et par symétrie on obtient $|\varphi(t') - \varphi(t'')| \leq 2\,|t''-t'|$. La fonction φ atteint donc son minimum sur $[0, 2\pi]$, qu'on note m: c'est bien un nombre strictement positif, car la fonction *sinus* n'est constante sur aucun intervalle de longueur non nulle. Il suffit de poser $\varepsilon := \frac{m}{2}$.

II.3.b. En supposant $N \geq 2$, on calcule comme en II.2.:

$$\begin{aligned}
&\left| f(t+h) - f(t) - \lambda^{(s-2)N}(\sin(\lambda^N\,(t+h)) - \sin(\lambda^N\,t))\right| \\
\leq\;& \sum_{k=1}^{N-1} \lambda^{(s-2)k}\,\lambda^k\,h + \sum_{k\geq N+1} 2\,\lambda^{(s-2)k} \\
=\;& h\,\lambda^{s-1}\,\frac{\lambda^{(s-1)(N-1)}-1}{\lambda^{s-1}-1} + 2\lambda^{(s-2)(N+1)}\frac{1}{1-\lambda^{(s-2)}} \\
\leq\;& \lambda^{(s-2)N}\left(\frac{1}{\lambda^{s-1}-1} + \frac{2\lambda^{s-2}}{1-\lambda^{(s-2)}}\right)
\end{aligned}$$

Or $\frac{1}{\lambda^{s-1}-1} + \frac{2\lambda^{s-2}}{1-\lambda^{(s-2)}}$ tend vers 0 lorsque $\lambda \to +\infty$, donc pour λ suffisamment grand ce nombre est inférieur à $\frac{\varepsilon}{2}$.

Dans le cas où $N = 1$, seule la seconde somme apparait dans la majoration et on conclut de la même manière.

II.3.c. Soit $t \geq 0$, on pose $t' := \lambda^N t$ et on choisit $h' \in [\frac{1}{2}, 1[$ tel que $|\sin(t'+h') - \sin(t')| > \varepsilon$ (question II.3.a.). On pose alors $h := \lambda^{-N}h'$ et en appliquant le résultat de la question précédente on a

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon}{2}\lambda^{(s-2)N} &\geq \left| f(t+h) - f(t) - \lambda^{(s-2)N}(\sin(\lambda^N\,(t+h) - \sin(\lambda^N\,t))\right| \\
&= \left| f(t+h) - f(t) - \lambda^{(s-2)N}(\sin(t'+h') - \sin(t'))\right| \\
&\geq \lambda^{(s-2)N}|\sin(t'+h') - \sin(t')| - |f(t+h) - f(t)| \\
&\geq \varepsilon\lambda^{(s-2)N} - |f(t+h) - f(t)|
\end{aligned}$$

d'où on déduit

$$|f(t+h) - f(t)| \;\geq\; \frac{\varepsilon}{2}\lambda^{(s-2)N} \;=\; \frac{\varepsilon}{2}(\lambda^{-(N-1)})^{2-s}\lambda^{s-2} \;\geq\; \frac{\varepsilon}{2}\lambda^{s-2}\delta^{2-s}.$$

II.4. D'après la question précédente, $C_1 := \frac{\varepsilon}{2}\lambda^{s-2}$ convient.

D'après la question II.2., si $\delta \in]0, \frac{1}{\lambda}[$ on a $\omega(t, t+\delta) \leq c\,\delta^{2-s}$ (car $x \mapsto x^{2-s}$ est croissante sur $[0, +\infty[$), donc $C_2 := c$ convient.

Ces deux constantes ne dépendent que de f (et non de t et δ).

II.5. L'ensemble G est inclus dans $[0,1] \times f([0,1])$, donc ne rencontre que des δ-cubes $C(k_1, k_2, \delta)$ pour lesquels $k_1 \in \{0, \ldots, q\}$.

Pour chaque intervalle $[k_1\delta, k_1\delta + \delta[$ avec $k_1 \in \{0, \ldots, q-1\}$, G rencontre au plus

$$Ent\left[\frac{1}{\delta}\omega(k_1\delta, k_1\delta+\delta)\right] + 1 + 1 \;\leq\; \frac{1}{\delta}\omega(k_1\delta, k_1\delta+\delta) + 2$$

tels δ-cubes: $Ent\left[\frac{1}{\delta}\omega(k_1\delta, k_1\delta+\delta)\right] + 1$ est le nombre maximal de δ-cubes fermés rencontrés, l'ajout de $+1$ permet de compter l'éventuel bord supérieur.

Au cas où $q\delta = 1$, il faut ajouter le δ-cube contenant $(1, f(1))$.

De plus, comme f est continue, l'ensemble $f([0,1])$ est connexe et donc $f([k_1\delta, k_1\delta+\delta[\,)$ l'est aussi: on en déduit que G rencontre au moins

$$Ent\left[\frac{1}{\delta}\omega(k_1\delta, k_1\delta+\delta)\right]+1 \;\geq\; \frac{1}{\delta}\omega(k_1\delta, k_1\delta+\delta)$$

tels δ-cubes lorsque $k_1 \in \{0, \ldots, q-1\}$.

On déduit de ce qui précède que

$$\frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^{q-1}\omega(i\,\delta, i\,\delta+\delta) \;\leq\; A(\delta, G) \;\leq\; \frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^{q-1}(\omega(i\,\delta, i\,\delta+\delta)+2)+1 \;\leq\; 2q+1+\frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^{q-1}\omega(i\,\delta, i\,\delta+\delta).$$

II.6. D'après les deux dernières questions, pour $\delta < 1$ suffisamment petit on obtient donc

$$C_1\delta^{-s} \;\leq\; \frac{1}{\delta}\,q\,C_1\,\delta^{2-s} \;\leq\; A(\delta, G) \;\leq\; 2q+1+\frac{1}{\delta}\,q\,C_2\,\delta^{2-s} \;\leq\; \delta^{-s}\,(C_2+C_2\,\delta+2\delta^{s-1}+3\delta^{s})$$

où on a utilisé $q \in [\delta^{-1}, \delta^{-1}+1]$. On obtient donc B-dim$(G) = s$.