

---

**MATHEMATIQUES 1**


---

**EXERCICE 1**

a. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \frac{n+2-n}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right).$$

Puis, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) \text{ (somme télescopique).}$$

On en déduit la convergence et la somme de la série proposée :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}.$$

b. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\sum_{k=1}^n \frac{2^k}{(k-1)!} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{2^{k-1}}{(k-1)!} = 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{k!},$$

et donc,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{(n-1)!} = 2e^2.$$

**EXERCICE 2**

a.  $f$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$  et  $2\pi$ -périodique. On peut donc calculer ses coefficients de FOURIER. Puisque  $f$  est paire, pour tout entier naturel non nul  $n$ , on a  $b_n(f) = 0$  et pour tout entier naturel  $n$ , on a

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t^2 \cos(nt) dt.$$

Ainsi,  $a_0(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t^2 dt = \frac{2\pi^2}{3}$  puis, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t^2 \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \left( \left[ t^2 \frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^\pi - \frac{2}{n} \int_0^\pi t \sin(nt) dt \right) = -\frac{4}{n\pi} \int_0^\pi t \sin(nt) dt \\ &= -\frac{4}{n\pi} \left( \left[ -t \frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos(nt) dt \right) = \frac{4}{n^2\pi} \cdot \pi(-1)^n = \frac{4(-1)^n}{n^2}. \end{aligned}$$

Maintenant, la fonction  $f$  est  $2\pi$ -périodique, continue sur  $\mathbb{R}$ , de classe  $C^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$ . D'après le théorème de DIRICHLET, la série de FOURIER de  $f$  converge vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . En particulier, pour tout réel  $x$  de  $[0, \pi]$ ,

$$f(x) = x^2 = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

b.  $x = 0$  fournit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12},$$

et  $x = \pi$  fournit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Mais alors,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{2} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{12} \right) = \frac{\pi^2}{8}.$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.}$$

c. Puisque  $f$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$  et  $2\pi$ -périodique, la formule de PARSEVAL fournit

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(t) dt,$$

ou encore

$$\frac{2\pi^4}{9} + 16 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^4 dt = \frac{2\pi^4}{5},$$

et donc,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.}$$

## PROBLEME : Une introduction aux fonctions tests

### I. Découverte des fonctions tests.

1. Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$ .

- Si  $\bar{A}$  est compacte, alors,  $\bar{A}$  est en particulier bornée. Puisque  $A \subset \bar{A}$ ,  $A$  est aussi bornée.
- Réciproquement, si  $A$  est bornée, il existe  $R > 0$  tel que  $A \subset [-R, R]$ . Mais alors  $\bar{A} \subset \overline{[-R, R]} = [-R, R]$ . On en déduit que  $\bar{A}$  est bornée. Comme d'autre part,  $\bar{A}$  est fermée, le théorème de BOREL-LEBESGUE permet d'affirmer que  $\bar{A}$  est compacte.

Finalement,

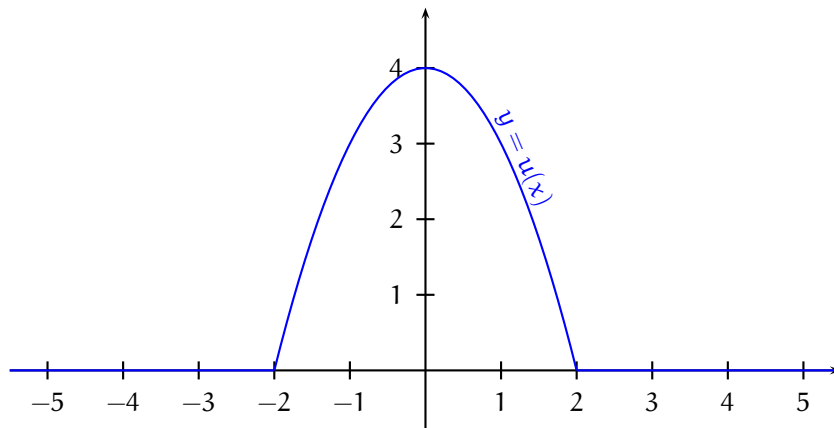
$$\boxed{\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), (A \text{ bornée} \Leftrightarrow \bar{A} \text{ compacte}).}$$

### 2. Quelques exemples

a. (Voir graphique page suivante)

$\{x \in \mathbb{R} / u(x) \neq 0\} = ]-2, 2[$  et donc  $\text{supp}(u) = [-2, 2]$ . Puisque  $] -2, 2[$  est borné, la question précédente permet d'affirmer que  $\text{supp}(u) = \overline{]-2, 2[}$  est compact.

La fonction  $u$  n'est dérivable en 2 ( $u'_g(2) = -4$  et  $u'_d(2) = 0$ ).  $u$  n'est donc pas une fonction test.



b.  $\{x \in \mathbb{R} / \sin(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$  et donc  $\text{supp}(\sin) = \mathbb{R}$ . La fonction  $\sin$  n'est pas à support compact et n'est donc pas une fonction test.

3. a. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel  $k$ , il existe un polynôme  $P_k$  de degré  $d_k = 2k$  tel que pour tout réel strictement positif  $x$ ,  $h^{(k)}(x) = P_k\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$ .

- Le résultat est clair pour  $k = 0$  avec  $P_0 = 1$  qui est bien un polynôme de degré  $d_0 = 0 = 2 \times 0$ .
- Soit  $k \geq 0$ . Supposons le résultat établi pour l'entier  $k$ . Pour tout réel strictement positif  $x$  on a alors

$$h^{(k+1)}(x) = (h^{(k)})'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}P_k\left(\frac{1}{x}\right) + P_k\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) e^{-\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x^2} \left(P_k\left(\frac{1}{x}\right) + P_k\left(\frac{1}{x}\right)\right) e^{-\frac{1}{x}} = P_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}},$$

avec  $P_{k+1} = -X^2(P_k + P_k')$ . Tout d'abord,  $P_{k+1}$  est bien un polynôme. Ensuite, puisque  $P_k$  n'est pas le polynôme nul, le degré de  $P_k + P_k'$  est le degré  $d_k$  de  $P_k$ . Mais alors  $d_{k+1} = 2 + d_k = 2k + 2 = 2(k + 1)$ .

On a montré par récurrence que  $\forall k \in \mathbb{N}, \exists P_k \in \mathbb{R}[X] / \forall x \in \mathbb{R}, h^{(k)}(x) = P_k\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$ . De plus,  $\forall k \in \mathbb{N}, \text{deg}(P_k) = 2k$ .

Un théorème classique d'analyse dit que si  $f$  est une fonction continue sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , de classe  $C^\infty$  sur  $]a, b[$  telle que pour tout entier naturel non nul  $k$   $f^{(k)}$  a une limite réelle en  $a$ , alors  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $[a, b]$ . Ici,

- $h$  est continue sur  $]0, +\infty[$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} h(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{-\frac{1}{x}} = 0 = h(0)$ . Donc  $h$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .
- $h$  est de classe  $C^\infty$  sur  $]0, +\infty[$ .

- Pour tout entier naturel non nul  $k$  et tout réel strictement positif  $x$ , on a  $h^{(k)}(x) = P_k\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$  où  $P_k$  est un polynôme. Les théorèmes de croissances comparées permettent alors d'affirmer que pour tout entier naturel non nul  $k$ ,  $h^{(k)}(x)$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0 par valeurs supérieures et en particulier  $h^{(k)}$  a une limite réelle quand  $x$  tend vers 0 par valeurs supérieures.

On en déduit que  $h$  est de classe  $C^\infty$  sur  $[0, +\infty[$  et en particulier admet en 0 des dérivées à droite à tout ordre égales à 0. Comme  $h$  est également de classe  $C^\infty$  sur  $] -\infty, 0]$  et que ses dérivées successives sur cet intervalle sont nulles, on a montré que

$h$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

b. Le support de  $h$  est  $[0, +\infty[$ . Donc  $h$  n'est pas une fonction test.

Supposons par l'absurde que  $h$  est développable en série entière. Alors, il existe un réel  $r > 0$  tel que pour tout réel  $x \in ]-r, r[$ ,

$$h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0.$$

$h$  est donc nulle sur un intervalle ouvert non vide de centre 0, ce qui n'est pas. Donc  $h$  n'est pas développable en série entière.

4. a. Soit  $x \in \mathbb{R}$ .  $-(x-1)(x+1) > 0 \Leftrightarrow x \in ]-1, 1[$ . Donc si  $x \in ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ ,  $\varphi(x) = 0$  et si  $x \in ]-1, 1[$

$$\varphi(x) = e^{-\frac{1}{-(x-1)(x+1)}} = e^{\frac{1}{x^2-1}}.$$

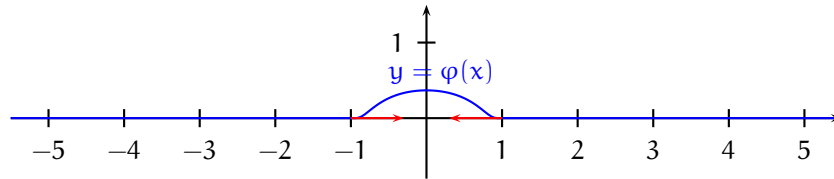
$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{si } x \in ]-1, 1[ \\ 0 & \text{si } x \in ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[ \end{cases}$$

Puisque la fonction  $x \mapsto -(x-1)(x+1)$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et que  $h$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , la fonction  $\varphi$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ . Puisque de plus le support de  $\varphi$  est  $[-1, 1]$  qui est un compact de  $\mathbb{R}$ ,

la fonction  $\varphi$  est une fonction test.

$\varphi$  est paire, croissante sur  $]-\infty, 0]$  et décroissante sur  $[0, +\infty[$ .

**Graphes de la fonction  $\varphi$**



b. La fonction  $x \mapsto h(-(x-3)(x-8))$  est une fonction test dont le support est  $[3, 8]$ .

La fonction  $x \mapsto h(-(x-1)(x-2)) + h(-(x-5)(x-6))$  est une fonction test dont le support est  $[1, 2] \cup [5, 6]$ .

5. Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  à support compact. Il existe un réel positif  $A$  tel que pour  $x \in ]-\infty, -A] \cup [A, +\infty[$ ,  $f(x) = 0$ . Mais alors  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

6. *Construction d'une suite régularisante*

a.  $\varphi$  est continue sur  $]-\infty, +\infty[$  et donc localement intégrable sur  $]-\infty, +\infty[$ .  $\varphi$  est nulle au voisinage de  $-\infty$  et au voisinage de  $+\infty$  et donc  $\varphi$  est intégrable au voisinage de  $-\infty$  et au voisinage de  $+\infty$ . Finalement,

$\varphi$  est intégrable sur  $]-\infty, +\infty[$ .

$\varphi$  est une fonction continue, positive et non nulle sur  $]-\infty, +\infty[$  et donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx > 0.$$

Posons alors  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx$  puis  $\rho = \frac{1}{I}\varphi$ .  $\rho$  vérifie toutes les conditions de l'énoncé.

b. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\rho_n(x) \neq 0 \Leftrightarrow n\rho(nx) \neq 0 \Leftrightarrow nx \in ]-1, 1[ \Leftrightarrow x \in ]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{supp}(\rho_n) = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right].$$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . En posant  $t = nx$ , on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x) dx = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \rho(nx) n dx = \int_{-1}^1 \rho(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t) dt = 1.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x) dx = 1.$$

## II. Approximation uniforme sur $\mathbb{R}$ par des fonctions de classe $C^\infty$ ou par des fonctions tests.

7. a. La suite de polynômes  $(P_n)$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers une certaine fonction  $f$ . On en déduit qu'il existe un entier  $N$  tel que, pour  $n \geq N$ ,  $\|P_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{2}$ . Pour  $n \geq N$ , on a alors

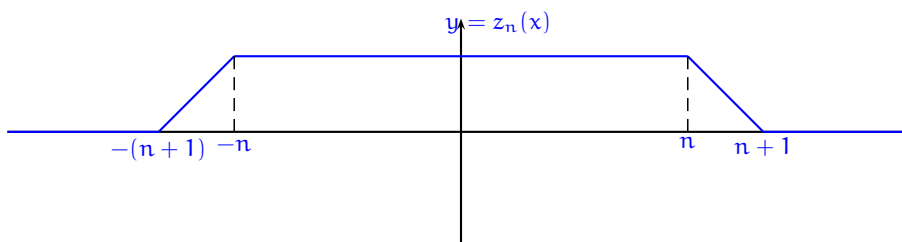
$$\|P_n - P_N\|_\infty \leq \|P_n - f\|_\infty + \|f - P_N\|_\infty \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

b. Ainsi, pour  $n \geq N$ , le **polynôme**  $P_n - P_N$  est borné sur  $\mathbb{R}$  et donc est un polynôme constant  $C_n$ . La suite de polynômes constants  $(C_n) = (P_n - P_N)$  converge vers  $f - P_N$  qui est donc un polynôme constant  $C$  (car si pour tout  $x$  réel et tout  $n \geq N$ ,  $C_n(x) = C_n(0)$  alors en faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , on obtient pour tout réel  $x$ ,  $C(x) = C(0)$ ).

Quand  $n$  tend vers  $+\infty$  dans l'égalité  $P_n = P_N + C_n$ , on obtient  $f = P_N + C$  et  $f$  est donc un polynôme.

Si une suite de polynômes  $(P_n)$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers une fonction  $f$ ,  $f$  est un polynôme.

### 8. a. Graphe de la fonction $z_n$ .



Soient  $x$  un réel positif puis  $n_0 = E(x) + 1$ . Pour  $n \geq n_0$ , on a  $n \geq E(x) + 1 > x$  et donc  $z_n(x) = 1$ . On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n(x) = 1$ . Si maintenant  $x$  est un réel négatif,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n(-x) = 1$ .

La suite de fonctions  $(z_n)$  converge simplement vers la fonction constante  $x \mapsto 1$  sur  $\mathbb{R}$ .

Maintenant, pour tout entier  $n$ ,  $\|z_n - 1\|_\infty = 1$  et on n'a donc pas  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|z_n - 1\|_\infty = 0$ .

La suite de fonctions  $(z_n)$  ne converge pas uniformément vers sa limite sur  $\mathbb{R}$ .

b. Soit  $g$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  et nulle à l'infini. Il existe un réel positif  $A$  tel que si  $|x| > A$ ,  $|g(x)| \leq 1$ . Mais la fonction  $g$  est continue sur le segment  $[-A, A]$  et donc bornée sur ce segment. Par suite, il existe un réel  $M$  tel que si  $|x| \leq A$ ,  $|g(x)| \leq M$ .

Pour tout réel  $x$  on a alors  $|g(x)| \leq \text{Max}\{1, M\}$ . On a montré que

si  $g$  est nulle à l'infini,  $g$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ .

c. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Puisque  $\{x \in \mathbb{R} / |x| \geq n + 1\} \subset \{x \in \mathbb{R} / |x| \geq n\}$ , on a  $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ .

La suite  $(\alpha_n)$  est décroissante.

Soit  $\varepsilon > 0$ . Puisque  $g$  est nulle à l'infini, il existe  $A > 0$  tel que si  $|x| > A$ ,  $|g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Soit alors  $n_0 = E(A) + 1$ . Pour tout réel  $x$  tel que  $|x| \geq n_0$ , on a  $|g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$  et donc  $\alpha_{n_0} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ . Mais alors, puisque la suite  $(\alpha_n)$  est décroissante (et positive), pour  $n \geq n_0$ , on a  $0 \leq \alpha_n \leq \alpha_{n_0} < \varepsilon$ . On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq \alpha_n < \varepsilon)$$

et donc que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0.$$

d. Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$ .

- Si  $|x| < n$ ,  $|g_n(x) - g(x)| = |g(x) - g(x)| = 0 \leq \alpha_n$ .
- Si  $|x| \geq n + 1$ ,  $|g_n(x) - g(x)| = |g(x)| \leq \alpha_n$ .
- Si  $n \leq |x| < n + 1$ ,  $|g_n(x) - g(x)| = |(-|x| + n + 1)g(x) - g(x)| = (|x| - n) \cdot |g(x)| \leq |g(x)| \leq \alpha_n$ .

Finalement, pour tout réel  $x$  on a  $|g_n(x) - g(x)| \leq \alpha_n$  et donc  $\|g_n - g\|_\infty \leq \alpha_n$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|g_n - g\|_\infty \leq \alpha_n.$$

e. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Le support de  $g_n$  est contenu dans  $\text{supp}(z_n) = [-(n+1), (n+1)]$ . Mais alors le support de  $g_n$  est borné est donc compact. De plus,  $g_n$  est continue sur  $\mathbb{R}$  en tant que produit de fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ . Finalement

pour tout entier naturel  $n$ ,  $g_n$  est continue sur  $\mathbb{R}$  à support compact.

D'après les questions c. et d., la suite  $(\|g_n - g\|_\infty)$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$  et donc la suite de fonctions  $(g_n)$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers la fonction  $g$ .

On a montré que

Une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ , nulle à l'infini est limite uniforme sur  $\mathbb{R}$  d'une suite de fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  à support compact  $(A_1)$ .

9. a. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . La fonction  $h : t \mapsto g(t)f(x-t)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . Le support de  $h$  est contenu dans le support de  $g$ . On en déduit que  $h$  est nulle à l'infini et en particulier intégrable au voisinage de  $+\infty$  et au voisinage de  $-\infty$ . Finalement

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{ la fonction } t \mapsto g(t)f(x-t) \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}.$$

b. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Pour  $t$  réel donné,  $-R \leq x-t \leq R \Leftrightarrow x-R \leq t \leq x+R$ . La fonction  $h : t \mapsto f(t)g(x-t)$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et son support est contenu dans  $[x-R, x+R]$ . On en déduit de nouveau que  $h$  est nulle à l'infini et en particulier intégrable au voisinage de  $+\infty$  et au voisinage de  $-\infty$ . Finalement

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{ la fonction } t \mapsto f(t)g(x-t) \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}.$$

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . En posant  $u = x-t$ , on obtient

$$\begin{aligned} (g * f)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(x-t) dt = \int_{-R}^R g(t)f(x-t) dt \\ &= \int_{x+R}^{x-R} g(x-u)f(u) (-du) = \int_{x-R}^{x+R} g(x-u)f(u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(x-u) du \\ &= (f * g)(x). \end{aligned}$$

Donc

$$f * g = g * f.$$

## 10. Support d'une convolution

a. Soient  $x$  un réel strictement plus grand que  $R+S$  et  $t$  un réel.

- Si  $|t| > R$ , on a  $g(t) = 0$  et donc  $g(t)f(x-t) = 0$ .
- Si  $|t| \leq R$ , alors  $-R \leq t \leq R$  puis  $x-R \leq x-t$ . Mais alors  $x-t > (R+S) - R = S$ . On en déduit que  $f(x-t) = 0$  et donc encore une fois que  $g(t)f(x-t) = 0$ .

Finalement, pour tout réel  $t$  on a  $g(t)f(x-t) = 0$  et donc  $g * f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(x-t) dt = 0$ .

De même, soient  $x$  un réel strictement plus petit que  $-(R + S)$  et  $t$  un réel.

- Si  $|t| > R$ , on a  $g(t) = 0$  et donc  $g(t)f(x - t) = 0$ .

- Si  $|t| \leq R$ , alors  $-R \leq t \leq R$  puis  $x - t \leq x + R < -(R + S) + R = -S$ . On en déduit de nouveau que  $f(x - t) = 0$  et donc que  $g(t)f(x - t) = 0$ .

Dans ce cas aussi  $g * f(x) = 0$ .

En résumé,  $f * g$  est nulle en dehors de  $[-(R + S), (R + S)]$  et donc

$f * g$  est à support compact.

**b.** On prend pour  $f$  la fonction constante  $x \mapsto 1$  et pour  $g$  la fonction  $z_0$ .  $g$  est à support compact et  $f$  ne l'est pas. Pour tout réel  $x$  on a

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(x - t) dt = \int_{-1}^1 z_0(t) dt = 1.$$

$f * g$  est la fonction constante  $x \mapsto 1$  et n'est donc pas à support compact.

### 11. Dérivation d'une convolution

**a.** Soient  $a$  un réel strictement positif puis  $x \in [-a, a]$ .

Si  $t$  est un réel tel que  $t > a + R$ , alors  $x - t < x - (a + R) \leq a - (a + R) = -R$  et donc  $g(x - t) = 0$ .

De même si  $t < -a - R$ , alors  $x - t > x + a + R \geq -a + a + R = R$  et donc  $g(x - t) = 0$ .

Mais alors

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x - t) dt = \int_{-a-R}^{a+R} f(t)g(x - t) dt.$$

**b.** Soient  $a$  un réel strictement positif et  $\Phi : [-a, a] \times [-a - R, a + R] \rightarrow \mathbb{R}$ .  
 $(x, t) \mapsto f(t)g(x - t) dt$

- Pour tout réel  $x$  de  $[-a, a]$ , la fonction  $t \mapsto \Phi((x, t))$  est continue par morceaux sur  $[-a - R, a + R]$ .

- Puisque  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ ,  $\Phi$  admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable sur  $[-a, a] \times [-a - R, a + R]$ . De plus pour  $(x, t) \in [-a, a] \times [-a - R, a + R]$ , on a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}((x, t)) = f(t)g'(x - t).$$

- Pour tout réel  $x$  de  $[-a, a]$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}((x, t))$  est continue par morceaux sur  $[-a - R, a + R]$  et pour tout réel  $t$  de  $[-a - R, a + R]$ , la fonction  $x \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}((x, t))$  est continue sur  $[-a, a]$ .

- D'après la question 5., une fonction à support compact est nulle à l'infini et d'après la question 8.b., une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  et nulle à l'infini est bornée sur  $\mathbb{R}$ . Les fonctions  $g$  et  $g'$  sont donc bornées sur  $\mathbb{R}$  ( $g'$  étant également continue sur  $\mathbb{R}$  à support compact). D'autre part,  $f$  est continue sur le segment  $[-a - R, a + R]$  et en particulier est bornée sur ce segment. On en déduit que les fonctions  $\Phi$  et  $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$  sont bornées sur  $[-a, a] \times [-a - R, a + R]$ . On note alors  $M_0$

(resp.  $M_1$ ) un majorant de la fonction  $|\Phi|$  (resp.  $\left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|$ ) sur  $[-a, a] \times [-a - R, a + R]$  puis on note  $\varphi_0 : t \mapsto M_0$  et  $\varphi_1 : t \mapsto M_1$ .

Les fonctions  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  sont continues, positives et clairement intégrables sur  $[-a - R, a + R]$  et pour  $(x, t) \in [-a, a] \times [-a - R, a + R]$ , on a

$$|\Phi((x, t))| \leq \varphi_0(t) \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x}((x, t)) \right| \leq \varphi_1(t).$$

En résumé

- $\forall x \in [-a, a]$ , la fonction  $t \mapsto \Phi((x, t))$  est continue par morceaux sur  $[-a - R, a + R]$  et intégrable sur  $[-a - R, a + R]$ .

- La fonction  $\Phi$  admet sur  $[-a, a] \times [-a - R, a + R]$  une dérivée partielle par rapport à sa première variable  $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$  vérifiant

- $\forall t \in [-a - R, a + R]$ , la fonction  $x \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}((x, t))$  est continue sur  $[-a, a]$ ,

- $\forall x \in [-a, a]$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}((x, t))$  est continue par morceaux sur  $[-a - R, a + R]$ ,

- il existe une fonction  $\varphi_1$  continue par morceaux, positive et intégrable sur  $[-a - R, a + R]$  telle que

- $\forall (x, t) \in [-a, a] \times [-a - R, a + R]$ ,  $\left| \frac{\partial \Phi}{\partial x}((x, t)) \right| \leq \varphi_1(t)$ .

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de LEIBNIZ),  $f * g$  est de classe  $C^1$  sur  $[-a, a]$  et pour tout réel  $x$  de  $[-a, a]$ ,

$$(f * g)'(x) = \int_{-a-R}^{a+R} \frac{\partial}{\partial x} (f(t)g(x-t)) dt = \int_{-a-R}^{a+R} f(t)g'(x-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g'(x-t) dt = f * g'(x).$$

Comme ce dernier résultat est valable pour tout réel strictement positif  $a$ , on a montré que

$$f * g \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } (f * g)' = f * (g').$$

Il est alors clair par récurrence que si  $g$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ ,  $f * g$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et que pour tout entier naturel  $k$ ,  $(f * g)^{(k)} = f * (g^{(k)})$ .

## 12. Application à l'approximation

a. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On rappelle que la fonction  $\rho_n$  est positive et de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , que  $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(t) dt = 1$  et que  $\text{supp}(\rho_n) = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ . Soit alors  $x$  un réel.

$$\begin{aligned} |f * \rho_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\rho_n(t) dt - f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(t) dt \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x-t) - f(x))\rho_n(t) dt \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t) - f(x)|\rho_n(t) dt = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f(x-t) - f(x)|\rho_n(t) dt. \end{aligned}$$

b. Soit  $\varepsilon > 0$ . Puisque  $f$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ ,

$$\exists \alpha > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Soient  $n_0 = E\left(\frac{1}{\alpha}\right) + 1$  puis  $n$  un entier supérieur ou égal à  $n_0$  et  $x$  un réel. On a déjà  $n_0 > \frac{1}{\alpha}$  et donc  $\frac{1}{n_0} < \alpha$ . Mais alors, pour tout réel  $t$  de l'intervalle  $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ , on a

$$|(x-t) - x| = |t| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \alpha.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} |f * \rho_n(x) - f(x)| &\leq \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f(x-t) - f(x)|\rho_n(t) dt \\ &\leq \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varepsilon \cdot \rho_n(t) dt = \varepsilon \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \rho_n(t) dt = \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(t) dt = \varepsilon. \end{aligned}$$

On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow |f * \rho_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon),$$

et donc que

$$\text{la suite de fonctions } (f * \rho_n) \text{ converge uniformément vers la fonction } f \text{ sur } \mathbb{R}.$$

D'autre part, chaque fonction  $\rho_n$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et donc d'après le résultat admis par l'énoncé (et puisque  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ ), chaque fonction  $f * \rho_n$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

c. Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  à support compact.  $f$  est en particulier continue sur  $\mathbb{R}$  et nulle à l'infini et donc uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ . D'après b., la suite  $(f * \rho_n)$  est une suite de fonctions tests convergeant uniformément vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .



On a montré que

toute fonction continue sur  $\mathbb{R}$  à support compact est limite uniforme sur  $\mathbb{R}$  d'une suite de fonctions tests  $(A_2)$ .

### III. Théorème de Withney.

**13.** Soit  $f$  une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .  $f$  est en particulier continue sur  $\mathbb{R}$ . Mais alors, puisque  $Z(f) = f^{-1}(\{0\})$  et que le singleton  $\{0\}$  est un fermé de  $\mathbb{R}$ ,  $Z(f)$  est l'image réciproque d'un fermé de  $\mathbb{R}$  par une application continue sur  $\mathbb{R}$  et donc  $Z(f)$  est un fermé de  $\mathbb{R}$ .

Si  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ ,  $Z(f)$  est un fermé de  $\mathbb{R}$ .

**14.** Une première tentative de preuve... infructueuse

Soit  $F$  une partie fermée et non vide de  $\mathbb{R}$ . Montrons que pour tout réel  $x$ ,  $d_F(x) = 0 \Leftrightarrow x \in F$ .

Soit donc  $x$  un réel.

- Si  $x$  est dans  $F$ , alors  $0 \leq d_F(x) = \inf_{y \in F} |y - x| \leq |x - x| = 0$  et donc  $d_F(x) = 0$ .
- Si  $d_F(x) = 0$ , il existe une suite  $(y_n)$  d'éléments de  $F$  telle que la suite  $(|x - y_n|)$  converge vers  $d_F(x)$  c'est-à-dire 0. Ceci signifie encore que la suite  $(y_n)$  converge vers  $x$ . Mais  $F$  est fermée et la limite d'une suite convergente d'éléments de  $F$  appartient à  $F$ . On en déduit que  $x \in F$ .

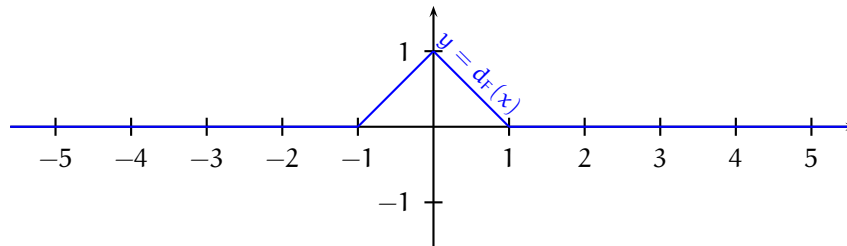
Finalement

$$Z(d_F) = F.$$

Le théorème de WHITNEY serait alors démontré si la fonction  $d_F$  était de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

Représentons graphiquement la fonction  $d_F$  dans le cas particulier où  $F = ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Si  $x \in ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ , on a  $d_F(x) = 0$ . Si  $x \in [-1, 0]$ ,  $d_F(x) = d(x, -1) = x + 1$  et si  $x \in [0, 1]$ ,  $d_F(x) = d(x, 1) = 1 - x$ . On obtient le graphique suivant :



La fonction  $d_F$  n'est pas dérivable en 0 et n'est donc pas de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  (mais est tout de même continue sur  $\mathbb{R}$ ). Cette fonction n'est pas solution du problème posé.

**15.** Utilisation de fonctions tests

(i) Soient  $a$  et  $b$  deux éléments de  $\overline{\mathbb{R}}$  tels que  $a < b$ .

Si  $a$  et  $b$  sont réels posons pour tout réel  $x$   $\varphi_{a,b}(x) = h(-(x-a)(x-b))$  (où  $h$  est la fonction étudiée à la question 3.).

Si  $a = -\infty$  et  $b$  est réel, posons  $\varphi_{a,b}(x) = h(-(x-b))$ .

Si  $a$  est réel et  $b = +\infty$ , posons  $\varphi_{a,b}(x) = h(x-a)$ .

Si  $a = -\infty$  et  $b = +\infty$ , posons  $\varphi_{a,b}(x) = e^x$ .

Dans tous les cas, la fonction  $\varphi_{a,b}$  est une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  dont l'ensemble des zéros est le complémentaire dans  $\mathbb{R}$  de l'intervalle  $]a, b[$ .

(ii) Soient  $a, b, c$  et  $d$  quatre éléments de  $\overline{\mathbb{R}}$  tels que  $a < b \leq c < d$ . La fonction  $\varphi_{a,b} + \varphi_{c,d}$  est une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  dont l'ensemble des zéros est le complémentaire de  $]a, b[ \cup ]c, d[$ .

**16.** Soit  $F$  une partie fermée de  $\mathbb{R}$ . Si  $F$  est vide, la fonction exponentielle est une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  dont l'ensemble des zéros est vide et donc égal à  $F$ . De même si  $F = \mathbb{R}$ , la fonction nulle est une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  dont l'ensemble des zéros est  $\mathbb{R}$  et donc égal à  $F$ .

Si  $F$  n'est pas vide et son complémentaire  $\Omega$  ne l'est pas davantage. Puisque  $F$  est fermé,  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$  et peut donc s'écrire comme une réunion finie ou dénombrable d'intervalles ouverts disjoints :  $\Omega = \bigcup_{k \in I} ]a_k, b_k[$ , où  $I$  est une partie de  $\mathbb{N}$ .

Si  $I$  est fini, quitte à renuméroter, on peut supposer que  $\Omega = \bigcup_{k=0}^n ]a_k, b_k[$  et la fonction  $\sum_{k=0}^n \varphi_{a_k, b_k}$  est une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  dont l'ensemble des zéros est le complémentaire de  $\Omega$ .

Si  $I$  est infini, quitte à renuméroter, on peut supposer que  $\Omega = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} ]a_k, b_k[$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , posons pour alléger  $\varphi_n = \varphi_{]a_n, b_n[}$ .

La première idée qui consiste à choisir  $\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n$  ne fonctionne pas car il n'y a aucune raison que cette série de fonctions converge.

On peut améliorer en choisissant la fonction  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \varphi_n$  car, les fonctions  $|\varphi_n|$  sont majorées par 1 de sorte que cette série converge normalement sur  $\mathbb{R}$ , mais cela n'assure pas encore la possibilité de dériver terme à terme indéfiniment. Il faut encore améliorer.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

Si l'intervalle  $]a_n, b_n[$  est borné, on sait que la fonction  $\varphi_n$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  à support compact. On en déduit que chaque  $\varphi_n^{(k)}$  est définie et bornée sur  $\mathbb{R}$ .

Si  $]a_n, b_n[ = ]-\infty, b_n[$ . D'après la question 3., chaque  $\varphi_n^{(k)}$  admet une limite réelle quand  $x$  tend vers  $-\infty$  et quand  $x$  tend vers  $b_n$ . Puisque  $\varphi_n$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et nulle sur  $[b_n, +\infty[$ , encore une fois, chaque  $|\varphi_n^{(k)}|$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ . Il en est de même, si  $]a_n, b_n[ = ]a_n, +\infty[$ .

Dans tous les cas, pour tout entier  $k$ ,  $\|\varphi_n^{(k)}\|_\infty$  existe et est un réel strictement positif (car  $\varphi_n$  n'est pas un polynôme).

Pour  $n$  entier naturel donné, considérons alors  $\lambda_n$  un réel strictement positif tel que,  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\|\lambda_n \varphi_n^{(k)}\|_\infty \leq \frac{1}{2^n}$ . On peut prendre par exemple

$$\lambda_n = \frac{1}{2^n \max_{0 \leq k \leq n} (\|\varphi_n^{(k)}\|_\infty)}.$$

Pour  $n \geq k$ , on a  $\|\lambda_n \varphi_n^{(k)}\|_\infty \leq \frac{1}{2^n}$ . Ceci montre que la série de fonctions  $\left( \sum_{i=k}^n \lambda_i \varphi_i^{(k)} \right)_{n \geq k}$  est normalement convergente

sur  $\mathbb{R}$  et donc (par récurrence sur  $k$ ) que la fonction  $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \varphi_n$  est pour tout  $k$ , de classe  $C^k$  sur  $\mathbb{R}$  avec  $\left( \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \varphi_n \right)^{(k)} =$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \varphi_n^{(k)}.$$

Enfin, puisque les  $\lambda_n$  sont strictement positifs et que les fonctions  $\varphi_n$  sont positives, on a pour tout réel  $x$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \varphi_n(x) = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \varphi_n(x) = 0 \Leftrightarrow x \in F.$$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \varphi_n$  est une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  dont l'ensemble des zéros est  $F$ . Le théorème de WITHNEY est démontré.